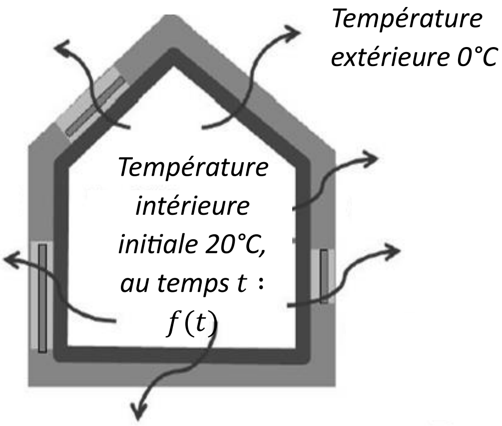
Ciel 1- Fonctions exponentielles

1- POURQUOI UTILISE-T-ON LA FONCTION EXPONENTIELLE

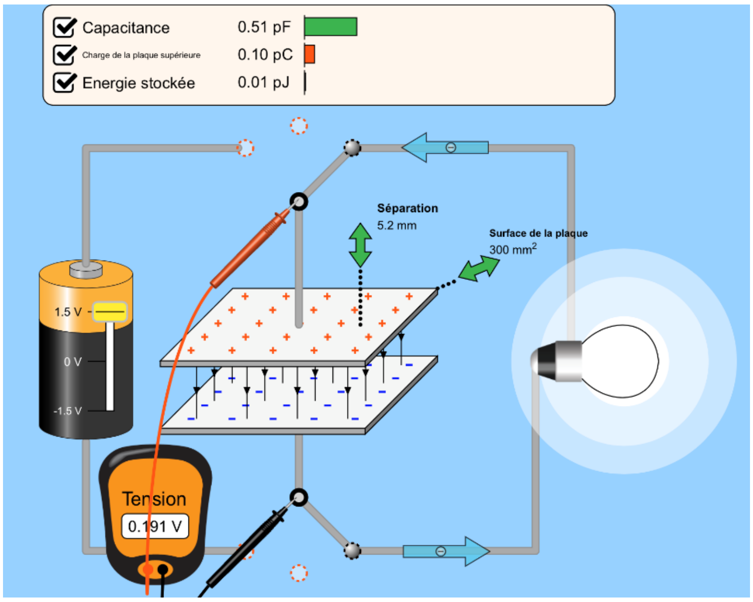
Les fonctions mathématiques sont souvent utilisées dans les sciences pour modéliser un phénomène. Dans la nature, de nombreux phénomènes ont une vitesse d'évolution qui est proportionnelle à la valeur du phénomène lui-même ….



Par exemple si on cherche la fonction f qui donne l'évolution de la température lors du refroidissement d'une maison sans chauffage, initialement à 20°C, sachant qu'à l'extérieur il fait 0°C, on constate expérimentalement que, pour n'importe quel temps $t > 0$: $f'(t) = k\,(f(t) - 0)$

Soit : $$f'(t) = k\ \ f(t)$$

Autre exemple, en électricité dans le cas d'une décharge de condensateur.



Si on cherche la fonction f qui donne la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur lors d'une décharge qui débute au temps t =0, on constate expérimentalement que pour tout temps $t > 0$:

$$f'(t) = k\ \ f(t)$$

Bien avant que ces problèmes techniques soient étudiés, c'est un mathématicien suisse, Leonhard Euler (1707 – 1783) qui entreprit des travaux dont l'objectif était « *de rechercher une fonction f qui permettait d'avoir $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$ pour toutes les valeurs du paramètre x* ».

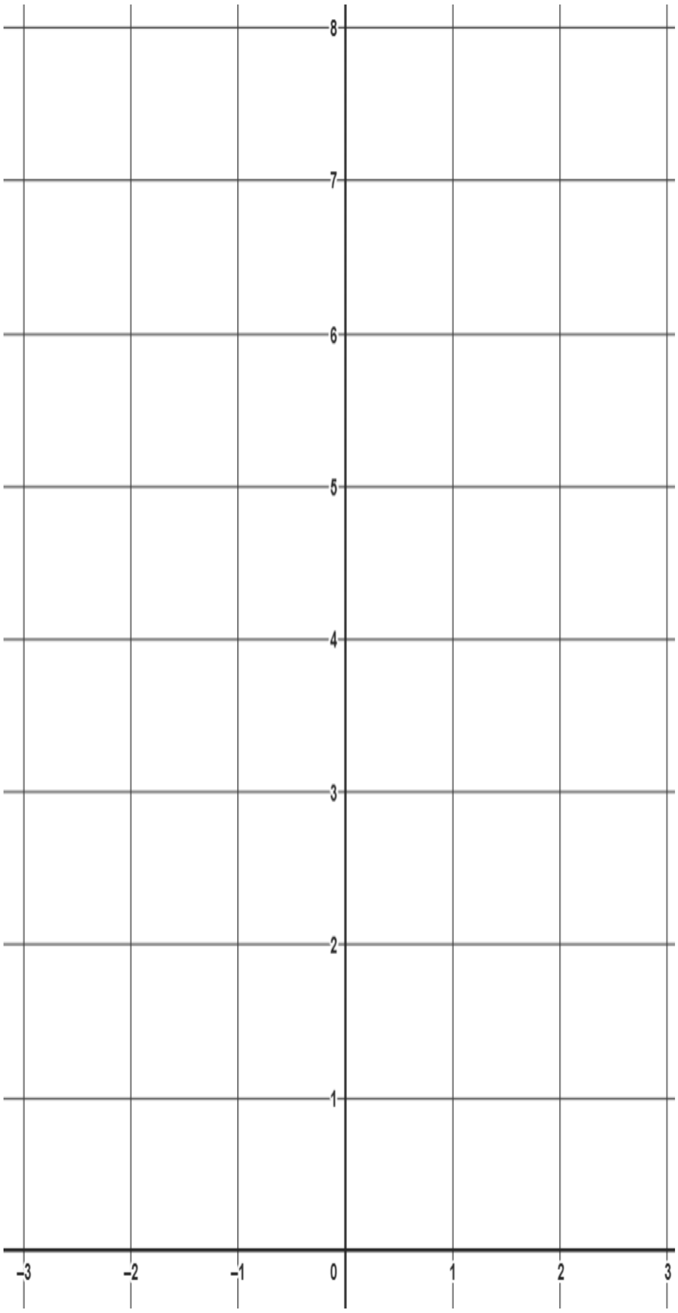
Ces travaux ont permis d'inventer la fonction exponentielle de base e. Cette fonction permet à présent de modéliser des phénomènes de refroidissement ou de décharge de condensateur, mais elle est également utilisée dans plein d'autres situations.

On se propose ici reprendre la démarche d'Euler et donc de réinventer cette fonction exponentielle.

2- DEMARCHE EULERIENNE UTILISEE GRAPHIQUEMENT :

Euler recherchait une fonction f telle que $f(0) = 1$ et $f' = f$. Avec une telle fonction, il faut que pour toute valeur de x, on ait $f'(x) = f(x)$.

Il est possible de trouver une telle fonction f en utilisant le calcul infinitésimal. On suppose que sur un petit intervalle $[x\,;x + dx]$, f s'approxime par une fonction affine de coefficient directeur $f'(x) = f(x)$. Graphiquement, cela revient à dire que la courbe C_f de f se confond avec la droite tangente au point d'abscisse x , sur tout l'intervalle $[x\,;x + dx]$. Si on fixe la largeur dx à 1, l'approximation ne sera pas bonne, mais il sera possible de la réaliser « à la main ». On voit cela ci-dessous :

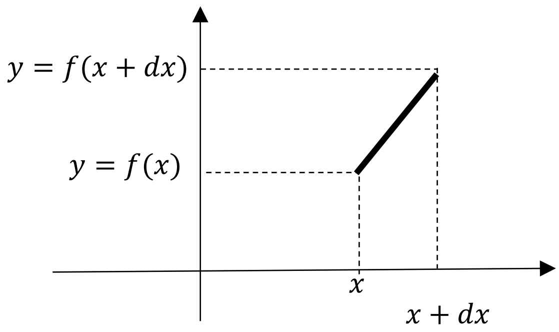


$f(-1) =$ donc : C_f se confond avec la droite tangente pour $x \in [-2\,;-1]$ On a ainsi : $f(-2) =$
$f(0) = 1$ donc : C_f se confond avec la droite tangente pour $x \in [-1\,;0]$ On a ainsi : $f(-1) =$
$f(0) = 1$ donc : C_f se confond avec la droite tangente pour $x \in [0\,;1]$ On a ainsi : $f(1) =$
$f(1) =$ donc : C_f se confond avec la droite tangente pour $x \in [1\,;2]$ On a ainsi : $f(2) =$
$f(2) =$ donc : C_f se confond avec la droite tangente pour $x \in [2\,;3]$ On a ainsi : $f(3) =$

Cette première approximation avec $dx = 1$ nous donne déjà l'allure de la courbe représentative de cette fonction pour laquelle $f(0) = 1$ et $f' = f$. Au niveau des valeurs, on constate que les valeurs de $f(x)$ augmentent rapidement lorsque x augmente.

3- DEMARCHE EULERIENNE TRADUITE SOUS FORME D'ALGORITHME :

Pour trouver précisément les valeurs de cette fonction f pour laquelle $f(0) = 1$ et $f' = f$, il est nécessaire de reprendre la démarche précédente, avec une valeur dx infiniment petite.



La fonction python ci-contre, permet de retourner la valeur de $f(X)$ si $X > 0$.

```
def exp(X) :
    dx = 0.000001
    x = 0
    y = 1
    while x < X :
        x = x + dx
        y = y + y*dx
    return y
```

Les domaines d'applications de cette fonction étant très nombreux, cette fonction f a été nommée spécialement et a pris le nom de FONCTION EXPONENTIELLE de base e . On a note $f(x) = \exp(x)$ ou $f(x) = e^x$

Pour déterminer les valeurs de $\exp(X)$ si X est négatif, on enrichit le script de la fonction exp() qui devient alors celui-ci-contre :

```
def exp(X) :
    dx = 0.000001
    x = 0
    y = 1
    if X > 0 :
        while x < X :
            x = x + dx
            y = y + y*dx
    if X < 0 :
        while x > X :
            x = x - dx
            y = y - y*dx
    return y
```

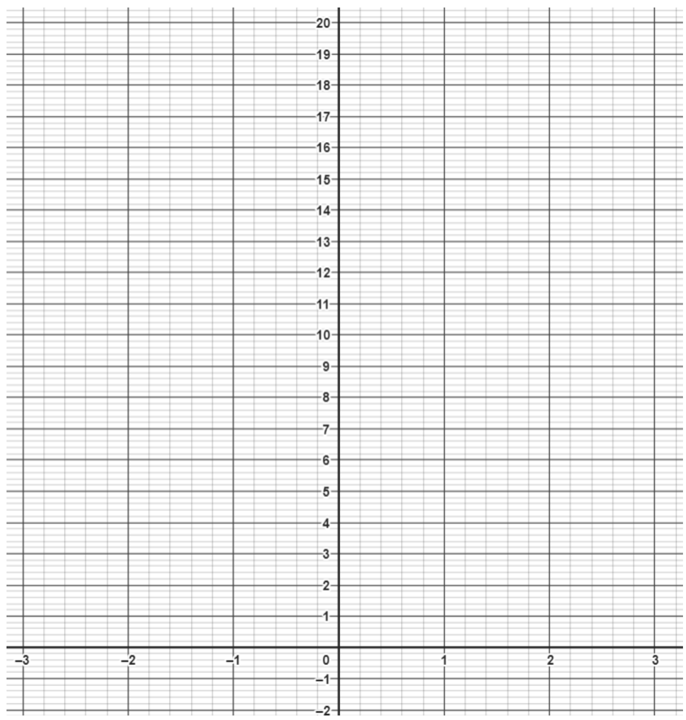
⇨ Ouvrir *Pyzo* et écrire le script de cette fonction *exp() dans nouveau fichier à sauvegarder sous le nom **monNom_exp.py***

⇨ Exécuter cette fonction pour calculer les images des nombres -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 . Par exemple pour calculer l'image de 1, on exécute dans la console :

```
>>> exp(1)
2.7182804693194718
```

⇨ Reporter les résultats arrondis à 10^{-5}près, dans le tableau suivant du document réponse distribué :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\exp(x)$						2,71828			



⇨ Reporter sur le graphe ci-contre du document réponse, les points correspondants de la courbe représentative de cette fonction, pour $-3 \leq x \leq 3$ seulement.

Pour vérifier que cette fonction vérifie bien la relation $f' = f$ pour toute valeur de x, on se propose de dériver à présent cette fonction, en utilisant le script python déjà vu dans une activité précédente :

```
def derive(f,x) :
    dx = 0.000001
    df = f(x+dx)-f(x)
    return df/dx
```

Si on exécute, par exemple, ce script pour calculer *exp'(1)* par exemple, on obtient toujours dans la console :

```
>>> derive(exp,1)
2.718280469160561
```

On retrouve donc bien, pour le cas particulier de $x = 1$, en arrondissant les résultats à à 10^{-5}près :

$$exp'(1) = exp\ (1)$$

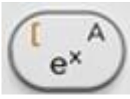
Cette fonction vérifie ainsi bien la relation $f' = f$ pour la valeur $x = 1$. Est-ce vrai pour les autres valeurs de x ?

⇨ Réaliser les exécutions nécessaires pour les autres valeurs de x identifiées -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3, 4 et compléter la 3ième ligne du tableau du document réponse, en arrondissant les valeurs des nombres dérivés à 10^{-5}près :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\exp(x)$						2,71828			
$\exp'(x)$						2,71828			

⇨ Finalement, les valeurs de cette fonction $exp(x)$ satisfont-elles la relation $f' = f$ pour toute valeur de x ?

⇨ L'algorithme de cette fonction exponentielle est bien sûr implémenté sur les calculatrices. Il est exécuté par l'intermédiaire de la la touche e^x.

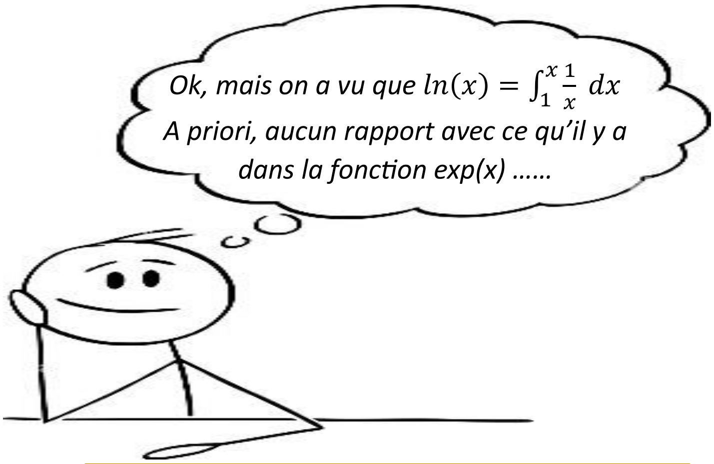


Pour terminer la validation de cette fonction, compléter la 4ième ligne du tableau donnée sur le document réponse, en écrivant les valeurs de $exp(x)$ donnée par votre calculatrice.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\exp(x)$						2,71828			
$\exp'(x)$						2,71828			
$\exp(x)$ donné par la calcultrice						2,71828			

4- LIEN ENTRE LES FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHME NEPERIEN

On constate que l'image de 1 par la fonction exponentielle : $exp(1)$, est égale au nombre d'Euler $e \approx 2{,}718281828$ déjà rencontré lors de l'étude réalisée sur la fonction $ln(x)$. On y avait trouvé que $ln(2{,}7182818281828) \approx \ln(e) = 1$….. Cela signifierait qu'il y a certainement un lien entre cette fonction $\exp\,(x)$ et la fonction $\ln\,(x)$ …



Le lien est ici, pour $x = 1$: $ln(\ exp(1)\ ) = 1$

Pour approfondir ce point, on se propose dans la suite, de calculer $ln(\ exp(x)\ )$ pour d'autres valeurs de x, -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 2 ; 3 ; 4. Pour cela on réutilise la fonction python *ln()* mise au point sur les séances précédentes.

⇨ Copie-collé dans votre fichier python, le script ci-contre de la fonction ln() (click sur l'icône pour ouvrir un fichier texte et copié-collé ensuite dans votre fichier .py).

```python
def f(x):
    return 1/x

def integrale(a,b,dx):
    x = a
    somme = 0
    if b >= a :
        while x < b :
            somme = somme + f(x)*dx
            x = x + dx
    elif b < a :
        dx = - dx
        while x > b :
            somme = somme + f(x)*dx
            x = x + dx
    return somme


def ln(x) :
    dx = 0.000001
    y = integrale(1,x,dx)
    return y
```

⇨ Réaliser les exécutions nécessaires pour déterminer $ln(\ exp(x)\ )$ pour les différentes valeurs de x du tableau du document réponse. Compléter ainsi la 5ième ligne. Par exemple, pour calculer $ln(\ exp(1)\ )$ on exécute dans la console :

```
>>> ln(exp(1))
1.0000000113080458
```

⇨ Compléter de même la 6ième ligne, en calculant pour chaque valeur de x, $exp\ (\ln\,(x)\,)$. Par exemple, pour calculer $exp(\ ln(1)\ )$ on exécute dans la console :

```
>>> exp(ln(1))
1
```

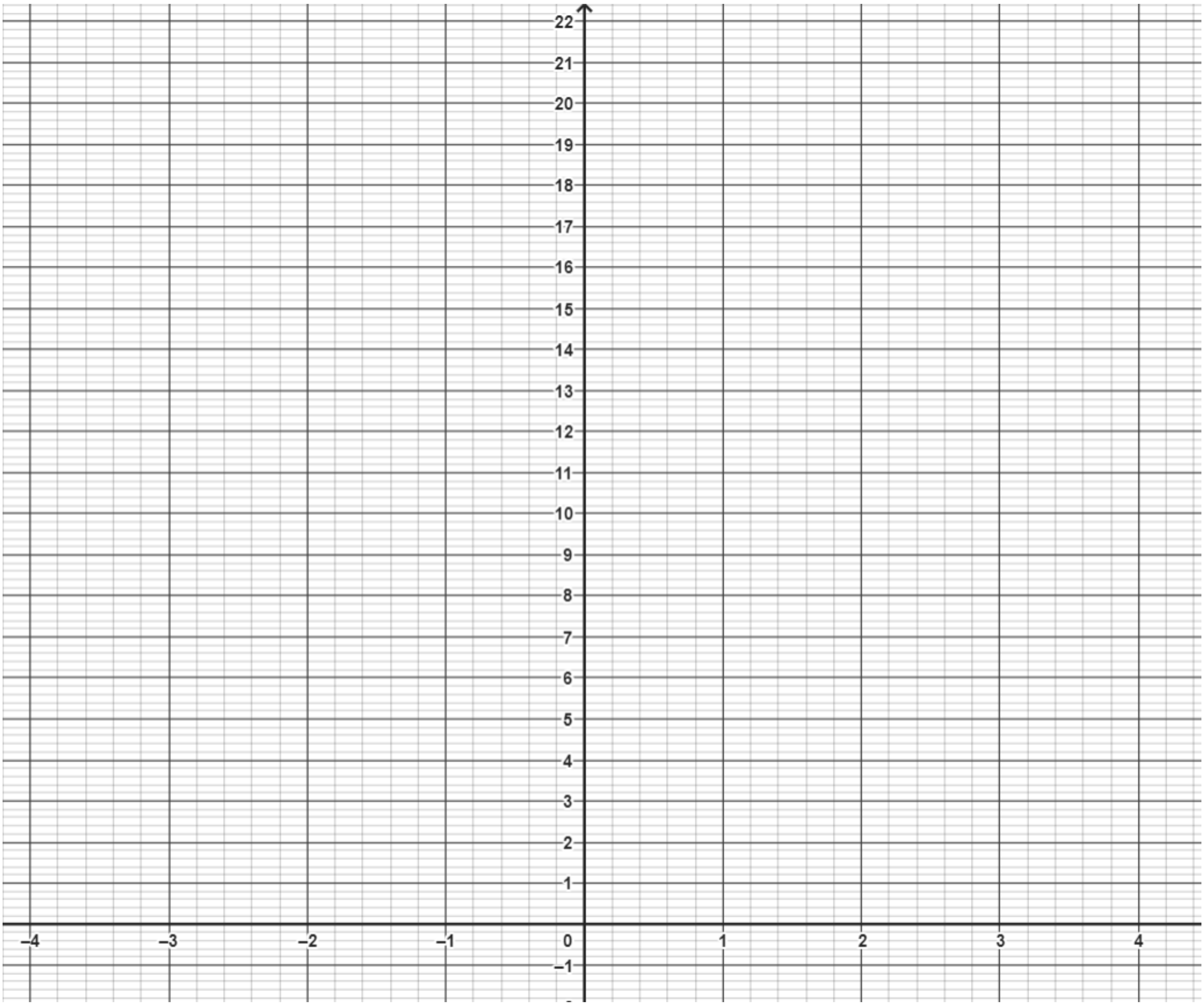
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\exp\,(x)$						2,71828			
$\exp'(x)$						2,71828			
$\exp(x)$ donné par la calcultrice						2,71828			
$ln(\ exp(x)\ )$						1,00000			
$exp\ (\ln\,(x)\,)$						1			

⇨ Finalement, quel lien existe-t-il entre ces 2 fonctions ? Ecrire sur le document réponse les 2 relations.

Ciel 1 - Fonctions exponentielles – Document réponse

<u>Nom</u> :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\exp(x)$						2,71828			
$\exp'(x)$						2,71828			
$\exp(x)$ donné par la calcultrice						2,71828			
$ln(\ exp(x)\ )$						1,00000			
$exp\ (\ln(x))$						1			



<u>CONCLUSION</u> : Relations qui lient les fonctions $\ln(x)$ et e^x :