

Exercice 1 : Matrice inverse

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 0,25 \end{pmatrix}$ avec a et b qui sont des constantes réelles

- 1- En effectuant le produit $A \times B$, déterminer la valeur des constantes a et b pour que $B = A^{-1}$

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2a & 1b + 2 \times 0,25 \\ 0 \times 1 + 4a & 0b + 4 \times 0,25 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 2a & b + 0,5 \\ 4a & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour avoir $B = A^{-1}$, il faut que ce produit donne la matrice identité : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Il faut donc que } \begin{cases} 1 + 2a = 1 \\ b + 0,5 = 0 \\ 4a = 0 \end{cases}$$

On constate que si $a = 0$ et $b = -0,5$, les 3 égalités précédentes sont vérifiées.

- 2- Ecrire la matrice A^{-1}

$$\text{On peut donc dire que } A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Calcul matriciel pour résoudre un système linéaire

$$x, y, z \text{ sont 3 inconnues qui satisfont les 3 relations suivantes : } \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x - 3y - z = -2 \\ 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

- 1- Soit la matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le système précédent est équivalent à l'équation matricielle : $A X = B$

Ecrire les matrices A et B et donner leur taille.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A de taille 3x3

X de taille 3x1

B de taille 3x1

- 2- Calculer avec votre calculatrice la matrice A^{-1}

$$[A] \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} \quad \begin{bmatrix} \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$$

3- Ecrire X en fonction de A^{-1} et B et calculer les coefficients de X

Soit : $AX = B$

On a donc : $A^{-1}AX = A^{-1}B$

Soit : $X = A^{-1}B$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & \frac{-2}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{7}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{15} - \frac{2}{15} + \frac{2}{15} \\ \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \\ \frac{-4}{15} - \frac{8}{15} - \frac{7}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{14}{15} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{-19}{15} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.4 \\ -1.3 \end{pmatrix}$$