Chapitre 16 - Matrices

Le mot « *matrice* » vient du latin « *mater* » (mère). Comme on enregistrait les enfants à la naissance dans des registres, le mot désigna ces registres. Cela explique les mots « matricule » ou « immatriculation ».

1- GENERALITES SUR LES MATRICES :

Définition : Une matrice de taille n x p est un tableau de nombres formé de n lignes et p colonnes. Une telle matrice s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les valeurs placées dans la matrice sont appelées coefficient de la matrice.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice 2x3 ; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ une matrice 3x1 , $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ une matrice 3x3

La matrice C est qualifiée de **matrice carrée** et **de matrice diagonale**. La matrice B est qualifiée de **matrice colonne**.

Propriétés : Deux matrices sont égales si elles ont même taille et mêmes lignes et colonnes.

2- OPERATIONS SUR LES MATRICES :

a. ADDITION :

Pour additionner 2 matrices, elles doivent avoir la même taille. On additionne alors les coefficients. Par exemple :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ alors $C = A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & 3-3 \\ 4-3 & -1+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

b. PRODUIT PAR UN NOMBRE REEL :

On multiplie chaque coefficient par ce nombre. Par exemple :

$A = \begin{pmatrix} -2 & 5,5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ alors $B = 2A = \begin{pmatrix} 2\times(-2) & 2\times 5,5 \\ 2\times 2 & 2\times(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$

c. PRODUIT DE 2 MATRICES :

Pour réaliser le produit d'une matrice A de p colonnes par une matrice B de n lignes, le nombre de colonnes p de A doit être égal au nombre de lignes n de B. On obtient alors une matrice de taille $n \times p$ en « multipliant » pour les lignes de A par les lignes de B :

Par exemple, si $n = p = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors :}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\times 3+3\times 4 & -2\times(-3)+3\times 1 \\ 1\times 3+2\times 4 & 1\times(-3)+2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$B \times A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times(-2)+(-3)\times 1 & 3\times 3+(-3)\times 2 \\ 4\times(-2)+1\times 1 & 4\times 3+1\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -7 & 14 \end{pmatrix}$$

ATTENTION : La multiplication n'est pas commutative : $A \times B \neq B \times A$

3- INVERSE D'UNE MATRICE :

a. MATRICE IDENTITE :

La matrice identité de taille $n \times n$ est une matrice carrée et diagonale. Les coefficients de la diagonale sont tous égaux à 1.

Par exemple : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité de taille 3 x 3 .

Propriété : En multipliant une matrice A par I , on retrouve la matrice A

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b. INVERSE D'UNE MATRICE :

<u>Définition</u> : L'inverse d'une matrice A ne peut exister que si A est une matrice CARREE. Mais les matrices carrées ne sont pas toujours inversibles. Si elles le sont, la matrice inverse est notée A^{-1} et le produit $A \times A^{-1}$ doit être égal à la matrice identité I :

$$A \times A^{-1} = I$$

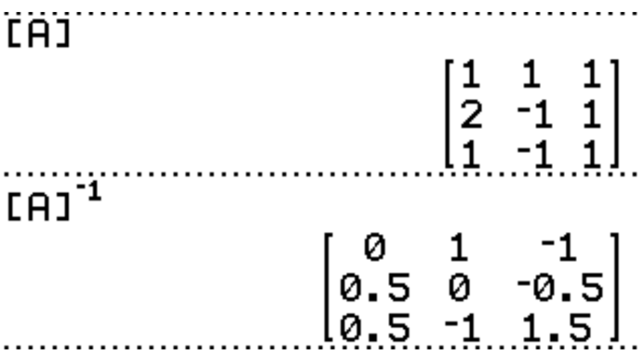
<u>Exemple</u> : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ alors on a $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & -1 & 1,5 \end{pmatrix}$.

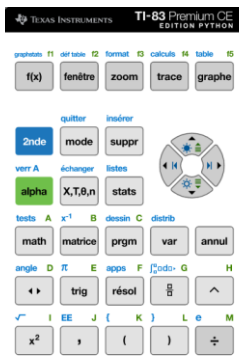
En effet, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & -1 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

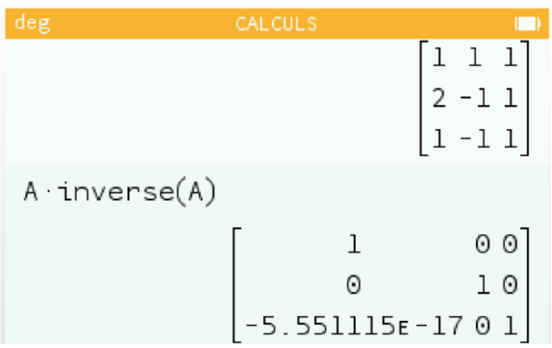
<u>Calcul de A^{-1}</u> : Le calcul de l'inverse d'une matrice est facile, mais assez long si on le fait à la main. On trouve facilement des méthodes utilisant le déterminant et les transposées sur le net. Dans le cadre de ce cours de BTS, on se contentera d'obtenir A^{-1} en utilisant une calculatrice ou un tableur.

<u>Sur calculatrice TI :</u>

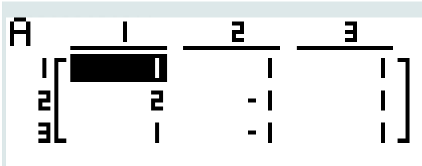


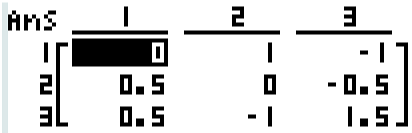


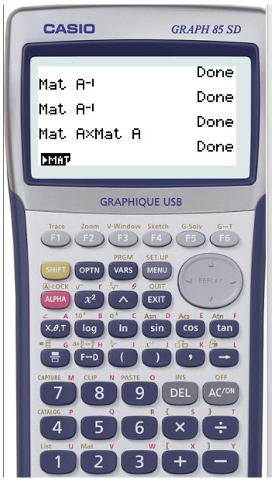
<u>Sur calculatrice NUMWORKS :</u>



Sur calculatrice CASIO :







4- Utilisation de matrices pour resoudre un systeme de n equations a n inconnues :

Exemple : On veut résoudre le système à 3 équations suivants : $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ x-y+z=4 \end{cases}$

Ce système est équivalent à celui : $A\ X\ =\ B$

Avec : $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ et $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}6\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$

Le système est équivalent à l'équation matricielle suivante :

$$A\,X=B$$

On a donc :