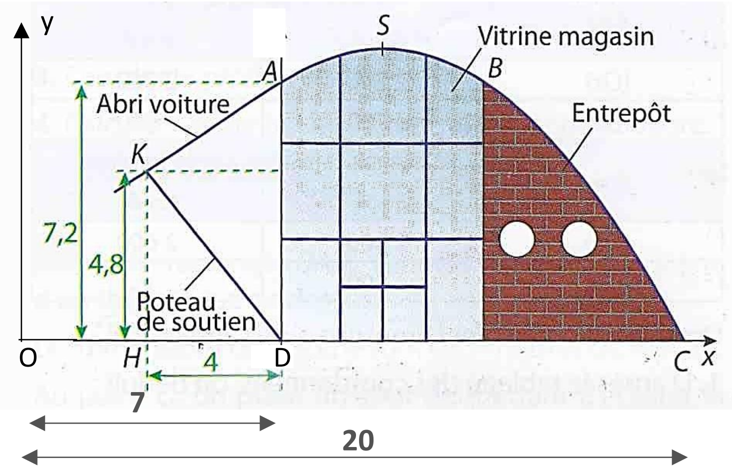
TD – Géogébra

MATRICES

Exercice 1 : Une société désire construire un magasin. L'architecte propose à l'entrepreneur la devanture suivante :



On veut tracer sur Géogébra, le profil du toit. L'abri voiture est un segment de droite $[KA]$. Le reste du toit entre les points A et S a une forme de parabole.

La droite (KA) est la courbe représentative d'une fonction affine f définie par : $f(x) = d\,x + e$;
d et e étant deux nombres réels.

La parabole entre A et C est la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g avec : $g(x) = a\,x^2 + b\,x + c$; a , b , c étant 3 nombres réels

1- Montrer que le coefficient directeur de la droite (KA) est : 0,6 . En déduire la valeur de d :

2- La droite (KA) passe par le point A de coordonnées A(7 , 7.2). On a donc $f(7) = 7.2$. Résoudre cette équation et en déduire la valeur de e :

⇨ Sur géogébra, tracer la portion de la courbe représentative de f pour $3 < x < 7$, en écrivant dans la ligne de saisie : $f(x) =$ fonction [$0.6\,x + 3$, 3 , 7]

3- Calculer la fonction dérivée $g'(x)$ en fonction des constantes réelles : a, b et c :

4- La courbe $\mathcal{C}_g$ passe par le point de coordonnées A(7 , 7.2). On a donc $g(7) = 7.2$
En déduire une relation (L_1) entre a, b et c :

5- Au point A, la courbe $\mathcal{C}_g$ est tangente à la droite (AK). On a donc $g'(7) = 0.6$
En déduire une relation (L_2) entre a, b et c :

6- La courbe $\mathcal{C}_g$ passe par le point C de coordonnées C(20 ; 0). On a donc $g(20) = 0$
En déduire une relation (L_3) entre a, b , c :

Pour trouver les constantes a, b , c , on est ainsi amené à résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 49\,a + 7\,b + c = 7.2 \\ 14\,a + b + 0\,c = 0.6 \\ 400\,a + 20\,b + c = 0 \end{cases}$$

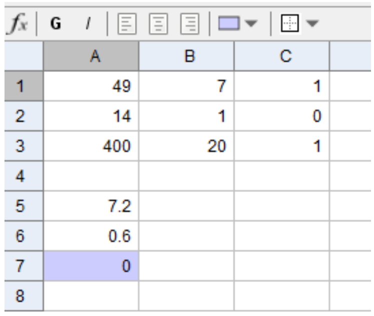
On utilise une méthode matricielle pour résoudre ce système. On crée les matrices :

$A = \begin{bmatrix} 49 & 7 & 1 \\ 14 & 1 & 0 \\ 400 & 20 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7.2 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On résout l'équation : $A \times X = B$ qui donne : $X = A^{-1} \times B$

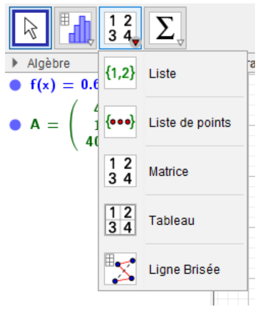
Sur Géogébra :

⇨ Afficher une fenêtre Tableur en cochant *Tableur* dans l'onglet *Affichage*

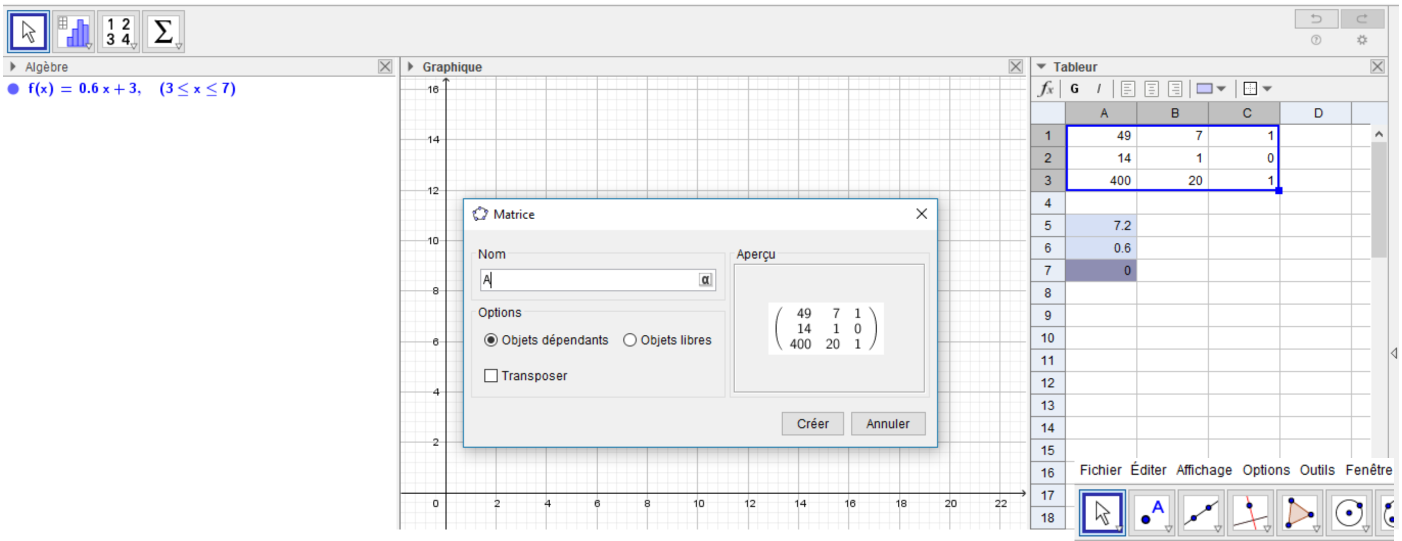
⇨ Dans la partie Tableur saisir les 9 nombres de la matrice A et les 3 de la matrice B.



⇨ Sélectionner les 9 termes de A et cliquer sur l'onglet Matrice situé en haut et gauche de la fenêtre :



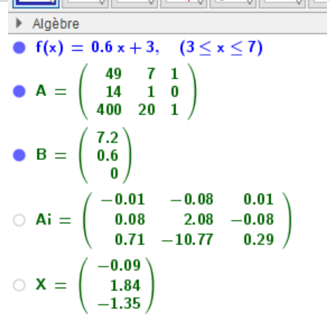
⇨ Compléter le widget de dialogue en précisant le nom de la matrice :



⇨ Créer de même la matrice B

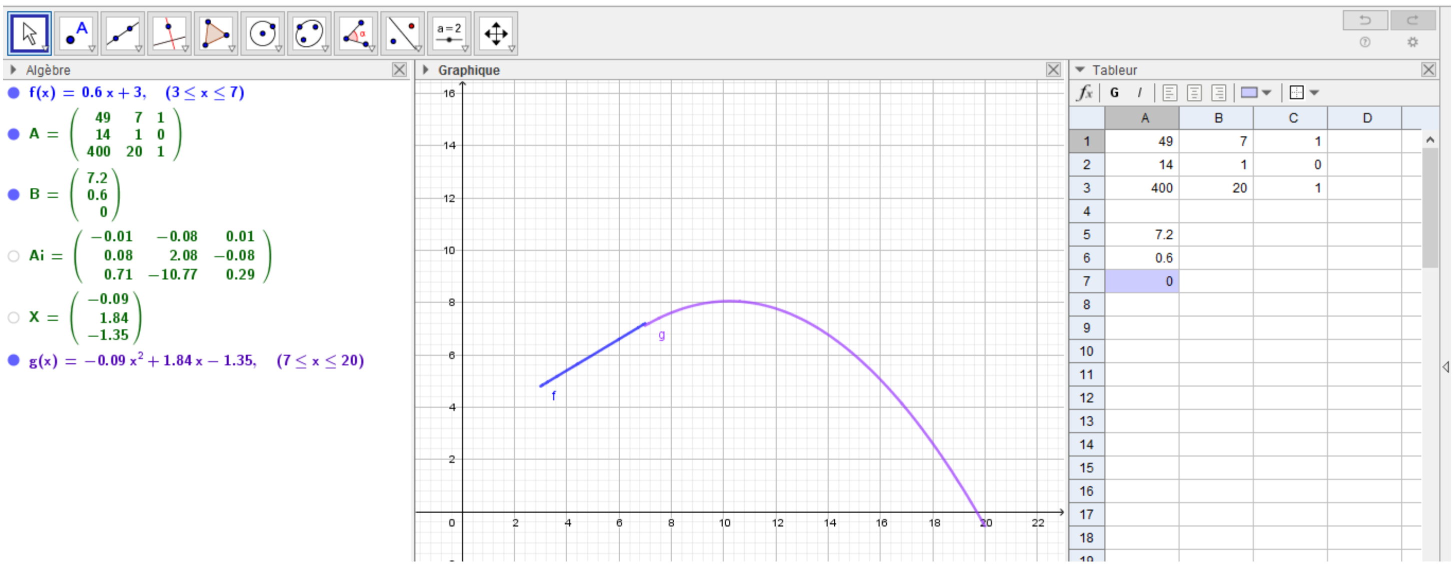
⇨ Dans la ligne de saisie, afficher la matrice A^{-1} en écrivant : *Ai = Inverser(A)*

⇨ Dans la ligne de saisie, calculer la matrice inconnue $X = A^{-1} \times B$ en écrivant : *X = Inverser(A)*B*



⇨ Dans la ligne de saisie, tracer la courbe $\mathcal{C}_g$ pour $7 < x < 20$ en écrivant :

$g(x) =$ *fonction* $[\, -0.09\, x^2 + 1.84\, x - 1.35 \quad , \quad 7 \quad , \quad 20 \,]$



La courbe tracée ne respecte pas précisément les 3 conditions (courbe passant par A et C et tangente en A à l'abris) car les valeurs de a, b , c calculées sont des valeurs approchées au centième.

Afin d'avoir toute la précision, saisir : $h(x) = X(1) * x^2 + X(2) * x + X(3)$. Par contre, Géogébra n'autorise alors pas le tracé partiel de la courbe pour $7 < x < 20$. Il est par contre possible, dans la partie tableur, de modifier les 3 termes de la matrice B qui correspondent respectivement à l'ordonnée du point A, à la pente de la tangente en A et à l'ordonnée de C. Essayer de modifier ces 3 valeurs pour voir la conséquence sur la courbe $\mathcal{C}_g$.

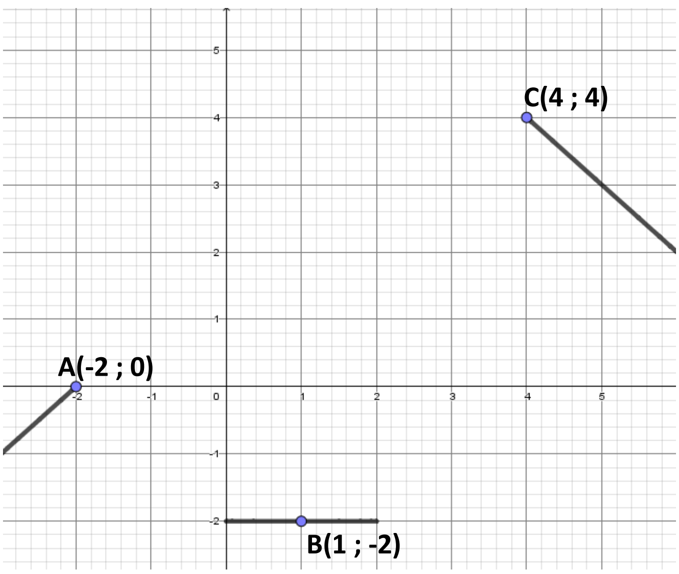
⇨ Enregistrer et fermer le fichier.

<u>Exercice 2 :</u>

⇨ Ouvrir un fichier Géogébra et saisir le tracé des 3 segments ci-contre : m(x)=fonction[$x + 2$, -3,-2] ; n(x)=fonction[-2, 0,2] ; p(x)=fonction[$-x + 8$, 4,6] .

On se propose de tracer une courbe polynomiale $\mathcal{C}_h$ représentative d'une fonction h qui respecte les conditions suivantes :

- $\mathcal{C}_h$ passant par le point A (-2 ; 0)
- $\mathcal{C}_h$ tangente en A à une droite de pente 1
- $\mathcal{C}_h$ passant par le point B (1 ; -2)
- $\mathcal{C}_h$ tangente en B à une droite horizontale
- $\mathcal{C}_h$ passant par le point C (4 ; 4)
- $\mathcal{C}_h$ tangente en C à une droite de pente -1



Ayant 6 conditions à respecter, on suppose que l'expression de h est :

$$h(x) = a\,x^5 + b\;x^4 + c\;x^3 + \;d\,x^2 + e\,x + f$$

a, b, c, d, e, f étant 6 constantes réelles.

1- Donner l'expression de $h'(x)$en fonction des constantes a, b, c, d, e :

2- Ecrire la relation qui doit lier les constantes a, b, c, d, e, f pour avoir $\mathcal{C}_h$ passant par le point A

3- Ecrire la relation qui doit lier les constantes a, b, c, d, e, f pour avoir $h'(-2) = 1$

4- Ecrire la relation qui doit lier les constantes a, b, c, d, e, f pour avoir $\mathcal{C}_h$ passant par le point B

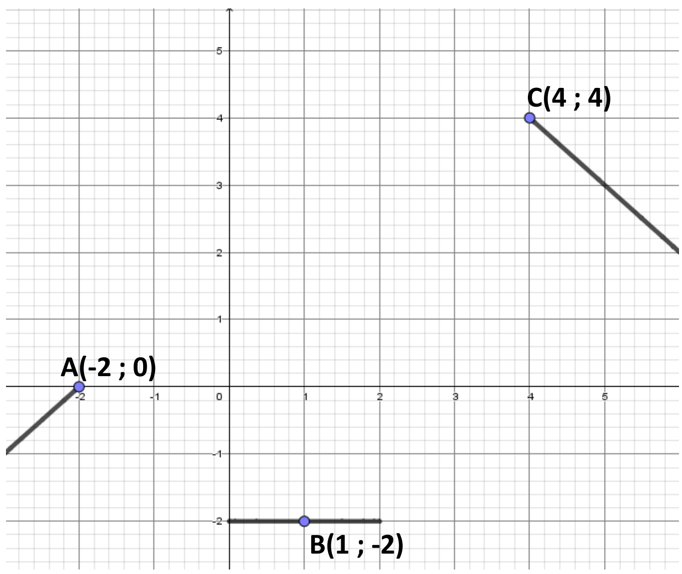
5- Ecrire la relation qui doit lier les constantes a, b, c, d, e, f pour avoir $h'(1) = 0$

6- Ecrire la relation qui doit lier les constantes a, b, c, d, e, f pour avoir $\mathcal{C}_h$ passant par le point C

7- Ecrire la relation qui doit lier les constantes a, b, c, d, e, f pour avoir $h'(4) = -1$

8- Utiliser la méthode matricielle pour calculer ces 6 constantes : Ecrire l'équation matricielle à résoudre (avec des matrices à 6 lignes) :

9- Saisir la fonction $h(x)$ sur géogébra et vérifier que les contraintes imposées au départ ont bien été respectées. Tracer ci-contre la courbe entre A et C :



10- Dans la partie tableur essayer de modifier les 6 termes de la matrice B qui correspondent aux ordonnées des points A, B, C et aux pentes en ces points. Voir si la courbe $\mathcal{C}_h$ « répond correctement ».