Sts-Ciel 2 DS suites numériques

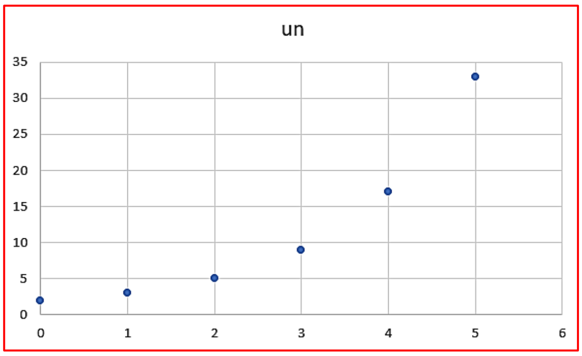
EXERCICE 1. :

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et par la relation $u_{n+1} = 2\,u_n - 1$

1- Calculer en détaillant par une relation littérale, les termes u_1 et u_2 de cette suite.
$u_1 = 2\,u_0 - 1 = 2 \times 2 - 1 = 3$ et $u_2 = 2\,u_1 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$

2- Calculer les valeurs des termes de cette suite pour $3 \leq n \leq 5$
$u_3 = 2\,u_2 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$; $u_4 = 2\,u_3 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$;
$u_5 = 2\,u_4 - 1 = 2 \times 17 - 1 = 33$

3- Représenter graphiquement cette suite pour $0 \leq n \leq 5$.



4- Peut-on déterminer la valeur du nombre $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$?
Les termes de cette suite ont tendance à augmenter rapidement. On conjecture le fait que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

5- Donner le code python de la fonction *suite()* qui prend en paramètre un nombre entier n et qui retourne la valeur u_n de cette suite.

```python
def suite(n) :
    u = 2
    for i in range(1,n+1):
        u = 2*u-1
    return u
```

Exemple d'exécution de cette fonction :

```
>>> suite(0)
2

>>> suite(5)
33
```

EXERCICE 2. :

On considère la suite (u_n) définie par $(u_n) = \{3\,;9\,;15\,;\,21\,;27;\,33;\ldots..\}$. Le premier terme est noté u_0

1- Donner la relation de récurrence qui définit cette suite. Comment appelle-t-on ce type de suite ?
Cette suite (u_n) peut être définie par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + 6$
On est en présence ici d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 6$

2- Calculer les valeurs de u_{10} et celle de u_{100} .
La suite étant arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 6$, on peut déterminer la relation explicite qui donne la valeur du terme u_n en fonction de n : $u_n = u_0 + r\,n = 3 + 6\,n$

On a ainsi : $u_{10} = 3 + 6 \times 10 = 63$ et $u_{100} = 3 + 6 \times 100 = 603$

3- Calculer la valeur du nombre $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} 3 + 6n = +\infty$$

4- Calculer la somme $S_{10} = \sum_{i=0}^{10} u_n$

La suite étant arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 6$, on a la propriété suivante :

$$S_{10} = \sum_{i=0}^{10} u_n = \frac{nombres\ de\ termes\ (1^{er} terme + dernier\ terme)}{2}$$

$$S_{10} = \frac{(n+1)\,(u_0 + u_{10})}{2} = \frac{(10+1)\,(3+63)}{2} = \frac{11 \times 66}{2} = 363$$

EXERCICE 3. :

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et par la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

1- Calculer en détaillant par une relation littérale, les termes u_3 et u_4 de cette suite.
   $u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 1 = 2$
   $u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3$
   $u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5$
2- Calculer les valeurs des termes de cette suite pour $3 \leq n \leq 6$
   $u_5 = u_4 + u_3 = 5 + 3 = 8$
   $u_6 = u_5 + u_4 = 8 + 5 = 13$

EXERCICE 4. :

On considère la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 0{,}5\ u_n$ avec comme premier terme $u_0 = 20$

1- Calculer les valeurs des 5 premiers termes de cette suite.
   $u_0 = 20$
   $u_1 = 0{,}5\ u_0 = 0{,}5 \times 20 = 10$
   $u_2 = 0{,}5\ u_1 = 0{,}5 \times 10 = 5$
   $u_3 = 0{,}5\ u_2 = 0{,}5 \times 5 = 2{,}5$
   $u_4 = 0{,}5\ u_3 = 0{,}5 \times 2{,}5 = 1{,}25$

2- Calculer les valeurs de u_{10} et celle de u_{100} .
   On est en présence ici d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 20$ et de raison $q = 0{,}5$. On peut ainsi déterminer la relation explicite qui donne la valeur du terme u_n en fonction de n :
   $$u_n = u_0\, q^n = 20 \times 0{,}5^n$$
   On a ainsi :
   $$u_{10} = u_0\, q^{10} = 20 \times 0{,}5^{10} \approx 0{,}0195$$
   $$u_{100} = u_0\, q^{100} = 20 \times 0{,}5^{100} \approx 0{,}0000$$
3- Calculer la valeur du nombre $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

   La valeur de la raison de cette suite géométrique étant inférieure à 1, on peut dire que : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

EXERCICE 5. :

On considère la suite (u_n) définie par $(u_n) = \{2\ ;\ 2{,}2\ ;2{,}42\ ;\ 2{,}662\ ;2{,}9282;\ 3{,}22102\ ;\ \ldots\ldots\}$. Le premier terme est noté u_0

1- Donner la relation de récurrence qui définit cette suite. Comment appelle-t-on ce type de suite ?
   On constate que $2{,}2 = 2 \times 1{,}1$; $2{,}42 = 2{,}2 \times 1{,}1$; $2{,}662 = 2{,}42 \times 1{,}1$; $2{,}9282 = 2{,}662 \times 1{,}1$; ...
   Cette suite (u_n) peut être définie par son premier terme $u_0 = 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1{,}1\ u_n$
   On est en présence ici d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}1$

2- Calculer les valeurs de u_{10} et celle de u_{100} .
   Etant en présence ici d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}1$, on peut déterminer la relation explicite qui donne la valeur du terme u_n en fonction de n :
   $$u_n = u_0\, q^n = 2 \times 1{,}1^n$$
   On a ainsi :
   $$u_{10} = u_0\, q^{10} = 2 \times 1{,}1^{10} \approx 5{,}1875$$
   $$u_{100} = u_0\, q^{100} = 2 \times 1{,}1^{100} \approx 27561{,}2247$$
3- Calculer la valeur du nombre $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
   La valeur de la raison de cette suite géométrique étant supérieure à 1, on peut dire que : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$