Ds – Ciel 2 IrEr

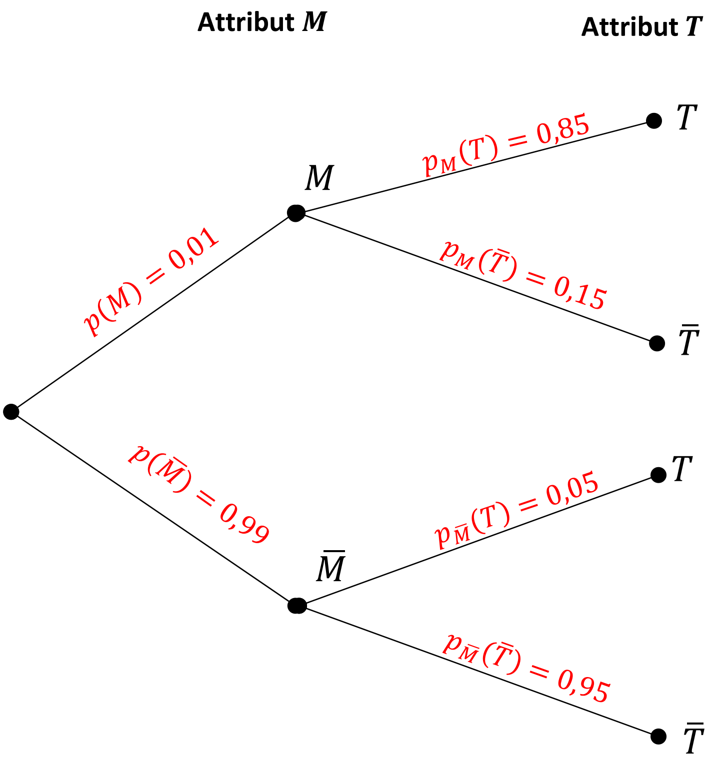
Probabilités conditionnelles

Exercice 1 : Lors d'une épidémie chez les bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut la guérir ; sinon la maladie est mortelle. Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1% est porteur de la maladie. On obtient les résultats suivants :

- Si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas.
- Si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilité pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie. On note M l'évènement « l'animal est porteur de la maladie » et T l'évènement « le test est positif ».

1- Construire un arbre pondéré correspondant à la situation décrite dans l'énoncé. Repérer sur les branches le nom et la valeur de la probabilité.



2- Un animal est choisi eu hasard. Déterminer la probabilité que son test soit positif ?

$$p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T)$$

$$p(T) = p(M) \times p_M(T) + p(\bar{M}) \times p_{\bar{M}}(T)$$

$$p(T) = 0{,}01 \times 0{,}85 + 0{,}99 \times 0{,}05 = 0{,}049 + 0{,}0095 = 0{,}058$$

3- Calculer la probabilité que l'animal tiré au sort soit atteint de la maladie, sachant qu'il a un test positif (arrondir au millième)

$$p_T(M) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{0{,}01 \times 0{,}85}{0{,}058} \approx 0{,}147$$

4- Ce test est-il concluant ?

14,7 % des personnes dont le test est positif sont effectivement porteur de la maladie. Ainsi, le résultat de ce test donne un mauvais résultat pour 85,3 % des personnes. On peut dire que le test n'est pas du tout fiable.

5- Construire l'arbre pondéré inverse de celui de la question 1 (arrondir les probabilités au millième). Repérer sur les branches le nom et la valeur de la probabilité.

6-

$p(T) = 0{,}058$

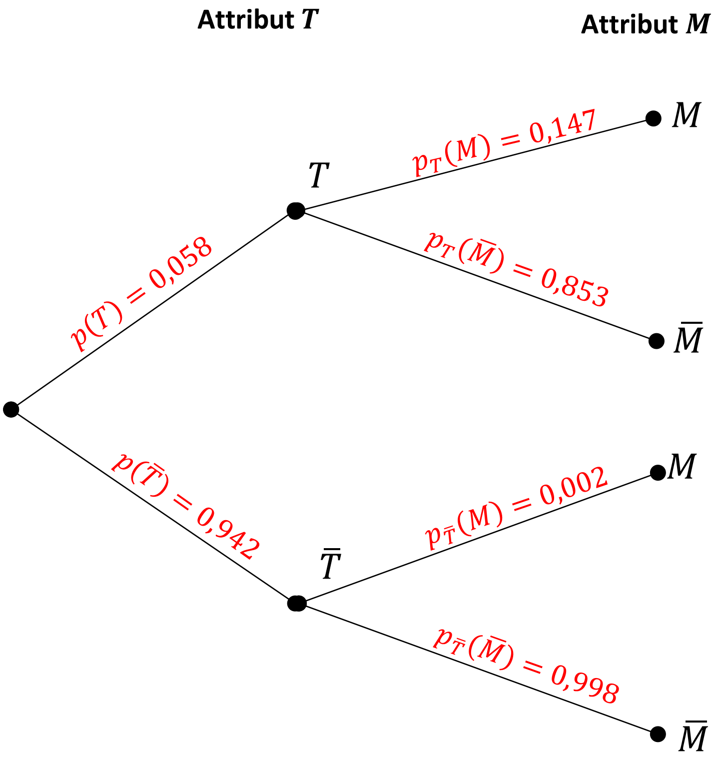
$p(\bar{T}) = 1 - 0{,}058 = 0{,}942$

$p_T(M) \approx 0{,}147$

$p_T(\bar{M}) \approx 1 - 0{,}147 \approx 0{,}853$

$p_{\bar{T}}(M) = \dfrac{p(\bar{T} \cap M)}{p(\bar{T})} = \dfrac{0{,}01 \times 0{,}15}{0{,}942} \approx 0{,}002$

$p_{\bar{T}}(\bar{M}) \approx 1 - 0{,}002 \approx 0{,}998$



7- Construire un tableau correspondant à la situation décrite dans l'énoncé et répondre aux questions 2 et 3 précédente en utilisant ce tableau dans lequel la taille de la population étudiée est de 10 000 bovins.

	M	***$\bar{M}$***	Total
T	0,85 x 100 = 85	495	85 + 495 = 580
$\bar{T}$	15	0,95 x 9900 = 9405	15 + 9405 = 9420
Total	0,01 x 10000 = 100	9900	10 000

On retrouve les résultats déterminés dans les questions précédentes :

$$p(T) = \frac{card(T)}{10\ 000} = \frac{580}{10\ 000} = 0{,}058$$

$$p_T(M) = \frac{card(T \cap M)}{card(T)} = \frac{85}{580} \approx 0{,}147$$

$$p_{\bar{T}}(M) = \frac{card(\bar{T} \cap M)}{card(\bar{T})} = \frac{15}{9420} \approx 0{,}002$$

Exercice 2 :

Soit A et B deux évènements tels que $p(A) = 0{,}8$ et $p(B) = 0{,}4$ et $p(A \cup B) = 0{,}88$

1- Calculer $p(A \cap B)$

On a : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Donc : $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}4 - 0{,}88 = 0{,}32$

2- Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

D'après l'énoncé, on déduit que :

$$p(A) = 0{,}8 \quad ; \quad p(B) = 0{,}4 \text{ et } p(A \cap B) = 0{,}32$$

On a : $p(A) \times p(B) = 0{,}8 \times 0{,}4 = 0{,}32$

Comme $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$, on peut dire que les évènements A et B sont indépendants.

3- Calculer $p_A(B)$

Comme les évènements A et B sont indépendants, a $p_A(B) = p(B)$