Chapitre 14 - Probabilités conditionnelles

1- EXEMPLE D'INTRODUCTION : METHODE TABLEAU

Enoncé : Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de 2 fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second. La proportion des composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second. On note D l'évènement « le composant est défectueux » ; F1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur ».
⇨ Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

Résolution : On peut répondre à cette question en se basant par exemple sur un achat de $N = 10\,000$ composants. On obtient ce que l'on appelle une population. On utilise les pourcentages indiqués pour comptabiliser dans cette population, les composants qui proviennent de F1 ou de F2 et ceux défectueux D ou non défectueux $\overline{D}$. On utilise un tableau à double entrée pour prendre en compte facilement les différents cas de figures :

	$F1$	$F2$	Total
D			
$\overline{D}$			
Total			

On peut alors répondre à la question « *Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur* » , question qui aurait aussi pu être formulée de la manière suivante : « *On tire au sort un composant. On constate qu'il est D . Quelle est la probabilité qu'il soit $F1$?* ». La probabilité recherchée se note $p_D(F1)$:

On peut également calculer d'autres probabilités :

Notation	Signification concrète	Valeur de la probabilité
$p_D(F2)$		

$p(F2)$		
$p(D)$		
$p_{F2}(D)$		

Point cours :

Soit une population de taille N , composée d'éléments qui ont 2 attributs : A ou $\bar{A}$ pour le premier, B ou $\bar{B}$ pour le second.

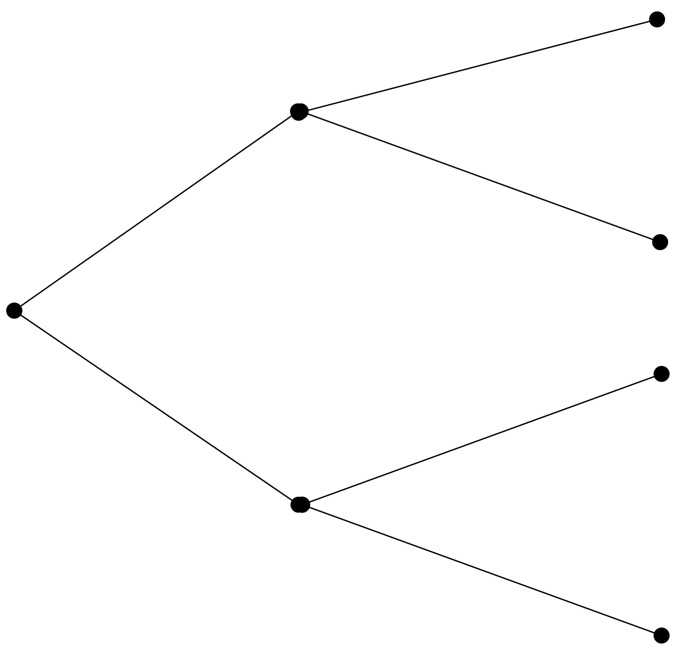
- Le nombre d'éléments qui ont l'attribut A est noté ______ et est appelé ______
- Le nombre d'éléments qui ont l'attribut A et l'attribut B est noté ______
- Si on tire au sort un éléments de dans cette population, la probabilité que celui-ci ait l'attribut A est : ______
- Si à l'issue du tirage au sort, on constate que l'élément pris a l'attribut A, on peut calculer la probabilité qu'il ait aussi l'attribut B. Cette probabilité est une PROBABILITE CONDITIONNELLE. Elle est calculée de la manière suivante : ______

2- MEME EXEMPLE TRAITE AVEC LA METHODE DES ARBRES PONDERES :

Enoncé : Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de 2 fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second. La proportion des composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second. On note D l'évènement « le composant est défectueux » ; F1 l'évènement « le composant provient du premier fournisseur ».
⇨ Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur.

Résolution : En utilisant la technique des arbres pondérés, il n'est pas nécessaire de raisonner sur une population précise. On prend en compte les différents cas de figure de la manière suivante :

1er attribut **2^{ième} attribut**



Question préliminaire : « *On tire au sort un élément. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?* »

Point cours : Règles de fonctionnement d'un arbre pondéré :

- Règle 1 : *La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1*
- Règle 2 : *La probabilité d'un évènement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités portées par les branches de ce chemin.*
- Règle 3 : *La probabilité d'un évènement est égale à la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à sa réalisation*

Question finale : « Sachant que le composant tiré au sort est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur » :

Propriétés : Soit une population de taille N, composée d'éléments qui ont 2 attributs : A ou $\bar{A}$ pour le premier, B ou $\bar{B}$ pour le second. Si on tire au sort un des éléments, on a :

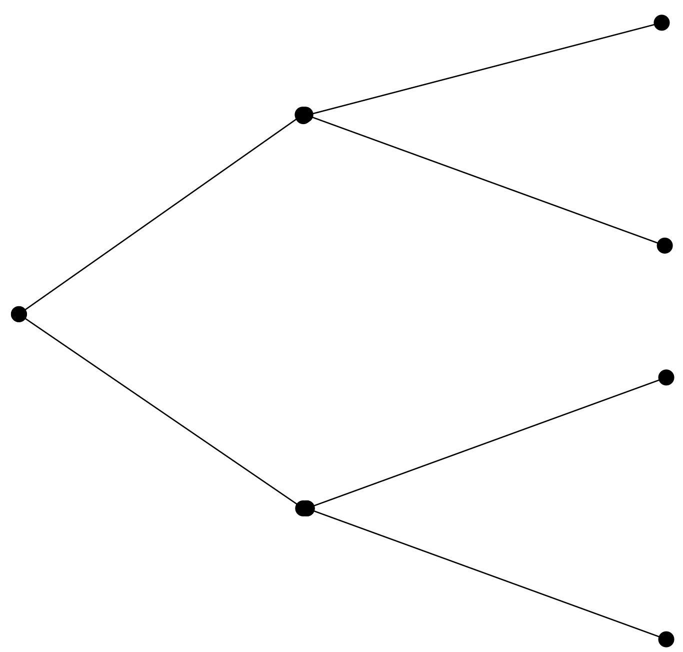
- Propriété 1 : $p(A) = p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$.
- Propriété 2 : La probabilité de B sachant A est définie par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

3- RETOURNEMENT DE L'ARBRE PRECEDENT :

On peut à partir d'un arbre, le retourner en calculant les différentes probabilités :

1er attribut **2ième attribut**

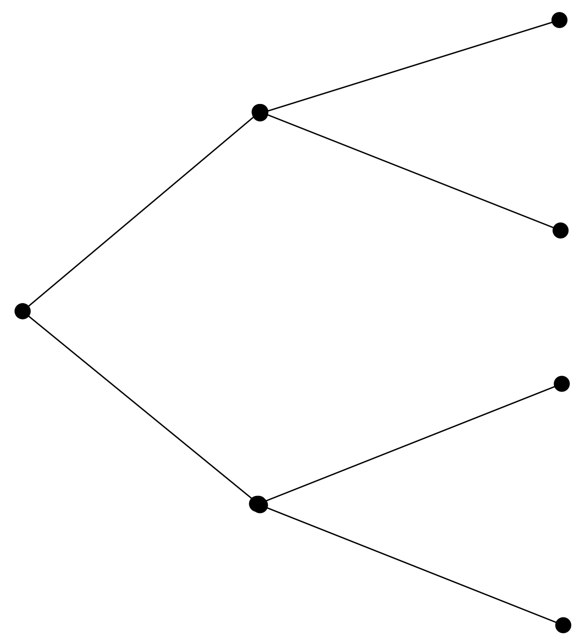


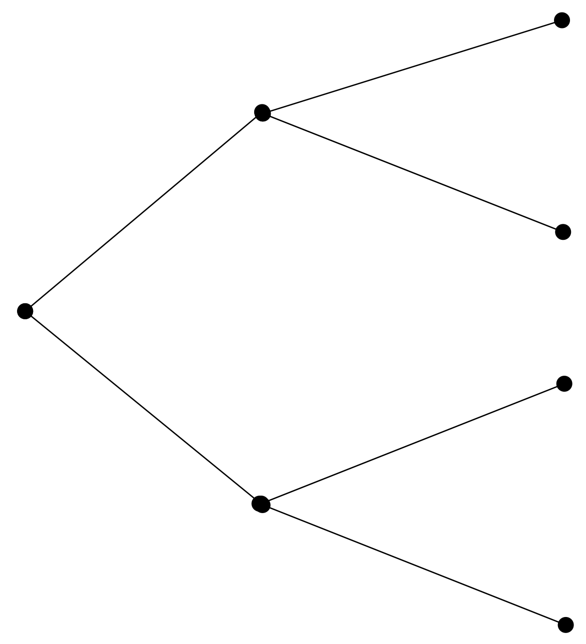
4- INDEPENDANCE DES EVENEMENTS :

Exemple : Un sondage est réalisé sur un échantillon de 100 personnes afin de savoir s'ils préfèrent habiter à la ville ou à la campagne. Les résultats sont :

	Ville (V)	Campagne (C)	Total
Hommes (H)	22	33	
Femmes (F)	18	27	
Total			

Question : Compléter les arbres ci-dessous :





Conclusion :

Définition : Si $p_A(B) = p(B)$ on dit que les évènements A et B sont

Conséquence :

Propriété : Deux évènements A et B sont INDEPENDANTS si et seulement si :

Autre propriété : Soit A et B deux évènements. On a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Exercice : Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué présente 2 défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au-moins un des 2 défauts. On prélève au hasard un sac dans la production d'une journée. On note A l'évènement « le sac présente le défaut a » et B l'évènement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des évènements A et B sont respectivement $p(A) = 0{,}02$ et $p(B) = 0{,}01$. On suppose que ces évènements sont indépendants.

Question 1 : Calculer la probabilité de l'évènement C : « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b »	Question 2 : Calculer la probabilité de l'évènement D : « le sac est défectueux »
Question 3 : Calculer la probabilité de l'évènement E : « le sac ne présente aucun défaut »	Question 4 : Sachant que le sac présente le défaut a, qu'elle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?