# Chapitre 15 - Loi binomiale

En théorie des probabilités et en statistique, la **loi binomiale** modélise la fréquence du nombre de succès obtenus lors de la réalisation de plusieurs expériences aléatoires identiques et indépendantes.

La loi binomiale est utilisée dans divers domaines d'étude, notamment à travers des tests statistiques qui permettent d'interpréter des données et de prendre des décisions dans des situations dépendant de l'aléa. De par la simplicité de sa définition, c'est l'une des lois de probabilité étudiées dans les cours d'introduction à la théorie des probabilités

## 1- EXEMPLE D'INTRODUCTION :

Enoncé : Une entreprise fabrique en très grande série une pièce technique. Le processus de fabrication n'est pas parfait et statistiquement, on a constaté que 5% des pièces avaient un défaut.

Pour vérifier que ce pourcentage ne s'aggrave pas, on constitue quotidiennement un échantillon de $n$ pièces, en sortie de production (par tirage au sort).

Pour chacune des pièces prélevées, on note **O** l'évènement « *La pièce tirée au sort est défectueuse* » et **1** l'évènement « *La pièce tirée au sort n'est pas défectueuse* ». Lorsque l'échantillon a été constitué, on note $X$ la variable qui comptabilise le nombre de pièces avec défaut parmi les $n$ tirées au sort.

On suppose que ces $n$ prélèvements sont indépendants (tirages supposés **avec remise**). Par exemple, même si on réalise 99 tirages successifs d'une pièce défectueuse, la probabilité d'obtenir une pièce défectueuse au 100ième tirage sera toujours de 0,05.

### a. CAS D'UN ECHANTILLON DE $n = 2$ PIECES :

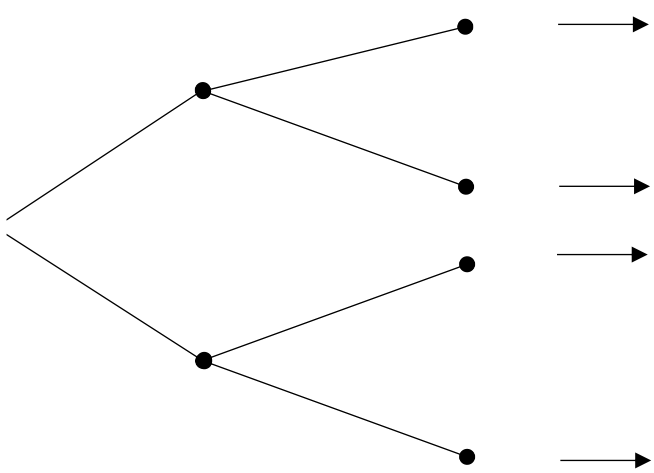
Question : « *Si $n = 2$, quelles sont les probabilités d'avoir dans l'échantillon : 0, 1 ou 2 pièces défectueuses ?* »

Réponse : L'outil le plus approprié pour répondre, est de construire un arbre pondéré.

1ère pièce tirée au sort

2ième pièce tirée au sort

| Issues | Valeur de la variable $X$ | Probabilité |
|---|---|---|



La loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ est la suivante :

| $x_i$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | Issues :<br>Nombre d'issues : $\binom{2}{0} =$<br>$p(X = 0) =$ | Issues :<br>Nombre d'issues : $\binom{2}{1} =$<br>$p(X = 1) =$ | Issues :<br>Nombre d'issues : $\binom{2}{2} =$<br>$p(X = 2) =$ |

## b. CAS D'UN ECHANTILLON DE $n = 3$ PIECES :

Question : « *Si* $n = 3$*, quelles sont les probabilités d'avoir dans l'échantillon 0, 1, 2 ou 3 pièces défectueuses ?* »

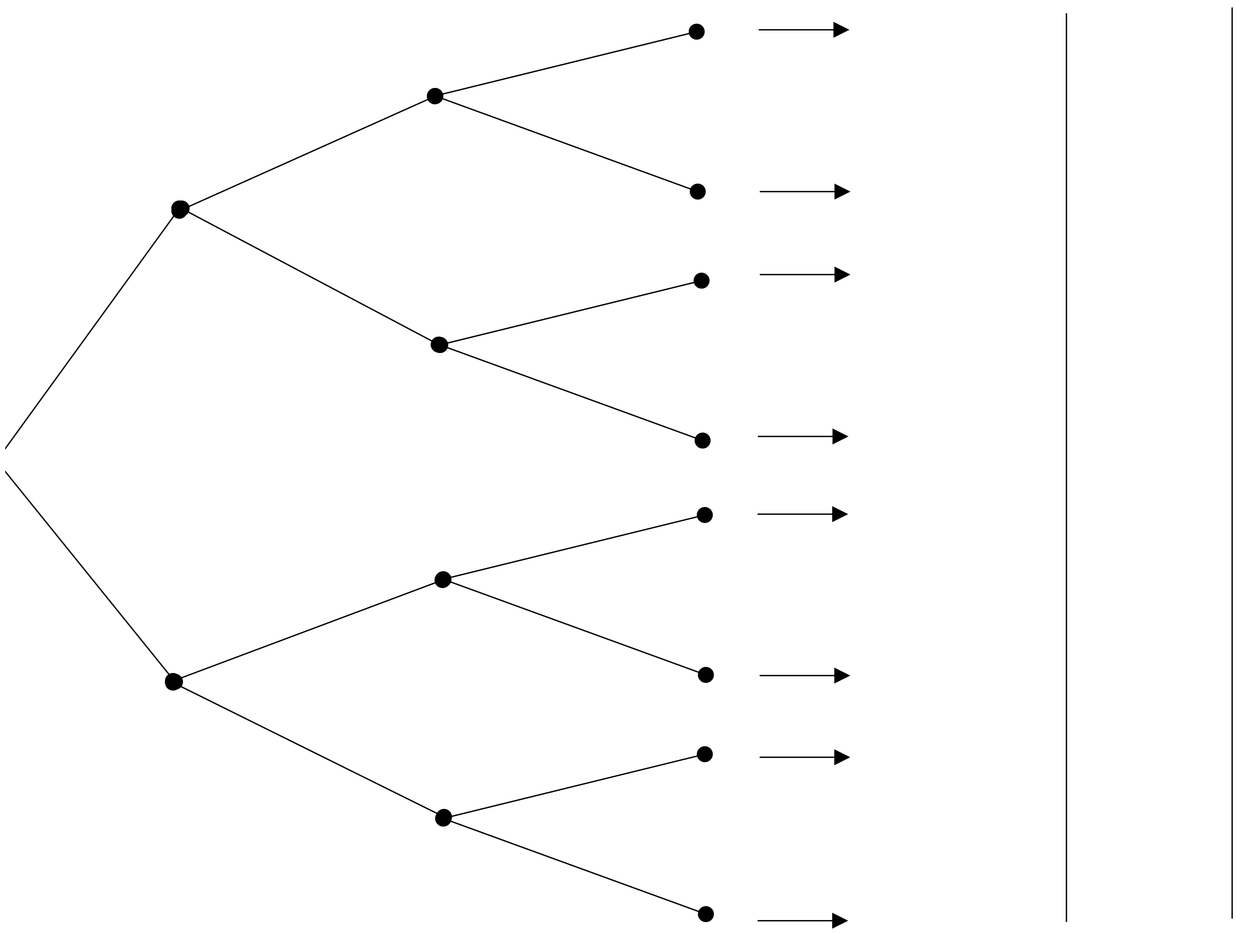
Réponse : On construit un arbre pondéré, cette fois-ci à 3 niveaux :

1ère pièce tirée au

2ième pièce tirée au sort

3ième pièce tirée au sort

Issues | Valeur de la variable $X$ | Probabilité



La loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ est la suivante :

| $x_i$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | Issues :<br><br>Nombre d'issues :<br>$\binom{3}{0} =$ | Issues :<br><br>Nombre d'issues :<br>$\binom{3}{1} =$ | Issues :<br><br>Nombre d'issues :<br>$\binom{3}{2} =$ | Issues :<br><br>Nombre d'issues :<br>$\binom{3}{3} =$ |
| | $p(X=0)$ | $p(X=1)$ | $p(X=2)$ | $p(X=3)$ |

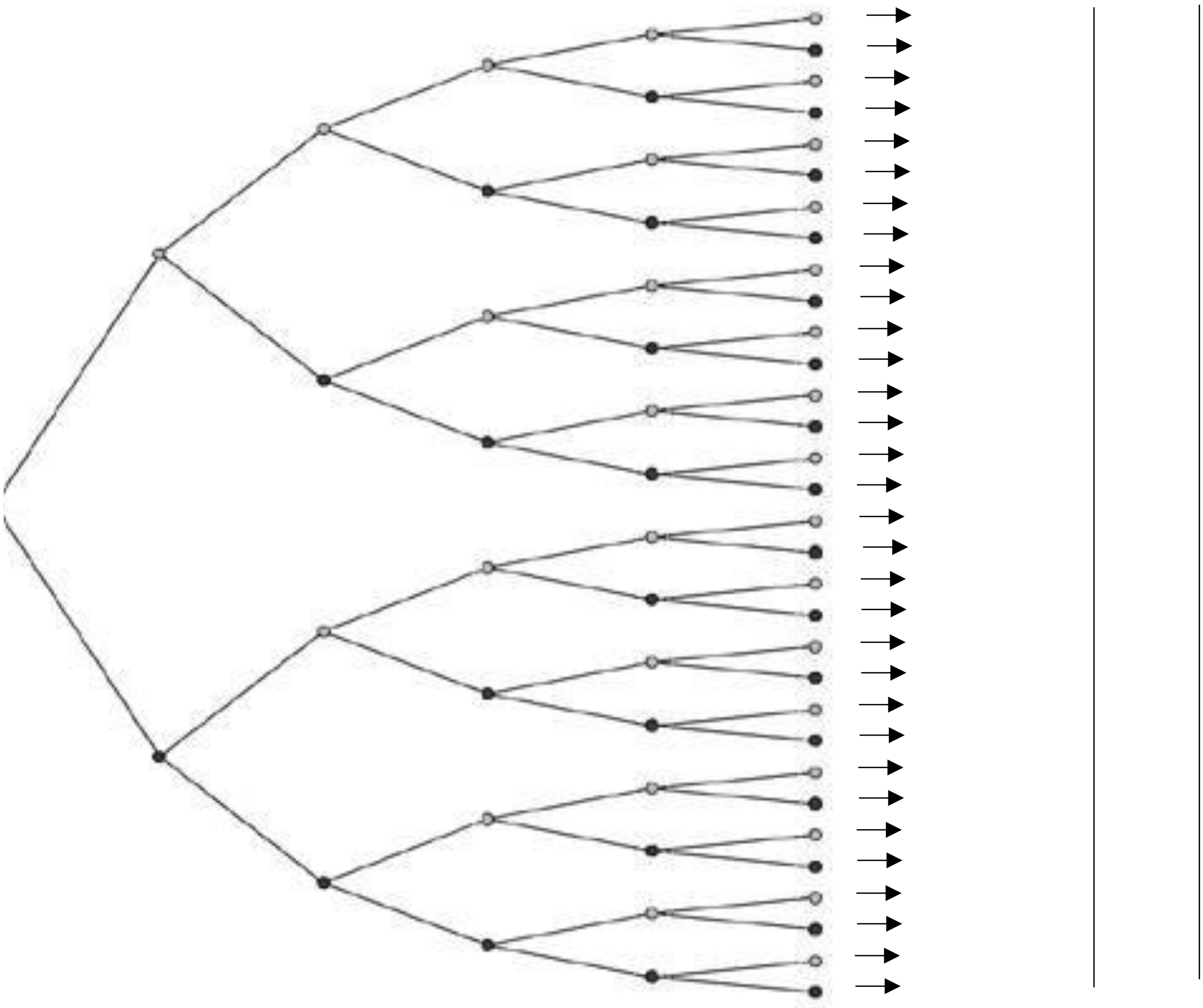
## C. CAS D'UN ECHANTILLON DE $n = 5$ PIECES :

<u>Question</u> : « *Si $n = 5$, quelles sont les probabilités de tirer 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 pièces défectueuses ?* »

<u>Réponse</u> : On peut construire un arbre pondéré à 5 niveaux

1$^{\text{ère}}$pièce tirée au | 2$^{\text{ième}}$pièce tirée au sort | 3$^{\text{ième}}$pièce tirée au | 4$^{\text{ième}}$pièce tirée au | 5$^{\text{ième}}$pièce tirée au

Issues | Valeur de la variable $X$ | Probabilité



⇨ L’expérience qui consiste à tirer au sort 5 pièces entraine un nombre d’issues égal à

⇨ Calcul de $p(X=5)$ ou de $p(X=0)$ :

| $X=5$ | | $X=0$ | |
|---|---|---|---|
| Issues : | Nombre d’issues : $\binom{5}{5}=$ | Issues : | Nombre d’issues : $\binom{5}{0}=$ |
| $p(X=5)=$ | | $p(X=0)=$ | |

⇨ Calcul de $p(X=4)$ ou de $p(X=1)$ :

| $X=1$ | | $X=4$ | |
|---|---|---|---|
| Issues : | Nombre d’issues : $\binom{5}{1}=$ | Issues : | Nombre d’issues : $\binom{5}{4}=$ |
| $p(X=1)=$ | | $p(X=4)=$ | |

⇨ Calcul de $p(X=2)$ :

| $X=2$ | |
|---|---|
| Issues : | Nombre d’issues : $\binom{5}{2}=$ |
| $p(X=2)=$ | |

⇨ <u>Calcul de $p(X=3)$</u> :

Finalement, on peut donner la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ pour un échantillon de 5 pièces :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | Nombre d'issues : $\binom{5}{0}=$ | Nombre d'issues : $\binom{5}{1}=$ | Nombre d'issues : $\binom{5}{2}=$ | Nombre d'issues : $\binom{5}{3}=$ | Nombre d'issues : $\binom{5}{4}=$ | Nombre d'issues : $\binom{5}{5}=$ |
| | $p(X=0)$ | $p(X=1)$ | $p(X=2)$ | $p(X=3)$ | $p(X=4)$ | $p(X=5)$ |

## 2- <u>Presentation de la loi de probabilite appelee loi binomiale</u>

*Daniel Bernoulli (1700-1782)*

La loi binomiale est utilisée dans une situation où l'on répète plusieurs fois une expérience qui ne possède que 2 issues. Dans le langage des probabilités, cette expérience est appelée « *épreuve de Bernoulli* ». Ce type d'épreuve conduit à un succès ou à un non succès. La probabilité du succès est notée $p$ .
Lorsque l'on répète, de manière indépendante, $n$ fois une expérience de Bernoulli, on dit que l'on a un « *schéma de Bernoulli* ». On peut alors compter le nombre $k$ de succès parmi les $n$ résultats de ces répétitions. Dans le langage des probabilités, ce nombre est appelé « *variable aléatoire* ». On peut le noter avec la lettre $X$.
La loi binomiale permet de calculer les probabilités d'obtenir $k$ succès dans une répétition de $n$ expériences de Bernoulli. On parle alors de loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ . On note cette loi $\mathcal{B}(n,p)$ .

<u>Loi Binomiale</u> : Si une variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, alors la probabilité d'obtenir $k$ succès dans la répétition de $n$ expériences est :

$$p(X=k) = \binom{n}{k} \; p^k \; p^{n-k}$$

Définition : Le nombre $\binom{n}{k}$ est appelé COEFFICIENT BINOMIAL. Ce nombre se lit « $k$ parmi $n$ ». Il est égal au nombre de parties à $k$ éléments d'un ensemble de $n$ éléments. Par exemple dans un jeu de cartes à 32 cartes, il y a $\binom{32}{5}$ mains possibles de 5 cartes (l'ordre des cartes dans une main ne compte pas).

Propriété 1 : Pour déterminer les coefficients binomiaux, on peut utiliser la relation de récurrence suivante :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Propriété 2: Pour déterminer les coefficients binomiaux, on peut aussi utiliser la relation suivante :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

L'opérateur ! se nomme ***factoriel***. On a par exemple :

- $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
- $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\ 320$

## 3- Triangle de Pascal pour calculer un coefficient binomial :

Le triangle de Pascal permet de déterminer les coefficients binomiaux en utilisant la relation de récurrence $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ . Cela donne :

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | |

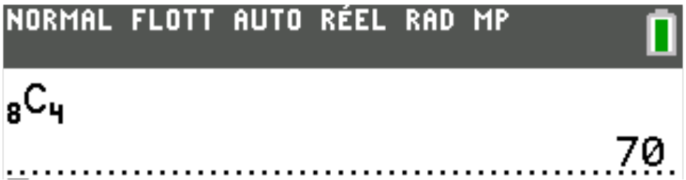
## 4- COEFFICIENT BINOMIAL CALCULE AVEC L'OPERATEUR FACTORIEL ! :

Les coefficients binomiaux peuvent être calculés avec la relation suivante : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Par exemple, le calcul de $\binom{8}{4}$ donnera :

## 5- COEFFICIENT BINOMIAL SUR CALCULATRICE :

Les coefficients binomiaux peuvent être donnés directement par une calculatrice Casio35 ou Ti 83 :

| *CASIO Graph 35* | *TI 83* |
|---|---|
| Dans mode standard, touches OPTN puis ▷ puis PROB et terminer comme indiqué sur l'écran ci-dessous :  | Touche math puis avec le pavé directionnel, sélectionner la colonne PROB, puis la fonction Combinaison  Terminer comme indiqué sur l'écran ci-dessous :  |







## 6- RETOUR SUR L'EXEMPLE D'INTRODUCTION :

Enoncé : Une entreprise fabrique en très grande série une pièce technique. Le processus de fabrication n'est pas parfait et statistiquement, on a constaté que 5% des pièces avaient un défaut. Pour vérifier que ce pourcentage ne s'aggrave pas, on constitue quotidiennement un échantillon de 8 pièces, en sortie de production (par tirage au sort). On travaille ici sur une loi de probabilité $\mathcal{B}(8\ ,0.05)$

1- Compléter ci-dessous le tableau de loi de probabilité :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | | | | | |

| $x_i$ | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = x_i)$ | | | | |

2- Calculer la probabilité $p(X \leq 1)$ d'obtenir au plus 1 pièce défectueuse dans l'échantillon prélevé :

3- Calculer la probabilité $p(X > 1)$ d'obtenir plus d'1 pièce défectueuse dans l'échantillon prélevé :

## 7- Loi binomiale pour des nombre de repetitions importants :

Enoncé : Une entreprise fabrique en très grande série une pièce technique. Le processus de fabrication n'est pas parfait et statistiquement, on a constaté que 5% des pièces avaient un défaut. Pour vérifier que ce pourcentage ne s'aggrave pas, on constitue quotidiennement un échantillon de 30 pièces, en sortie de production (par tirage au sort).
On travaille ici sur une loi de probabilité $\mathcal{B}(30\ ,0.05)$ .

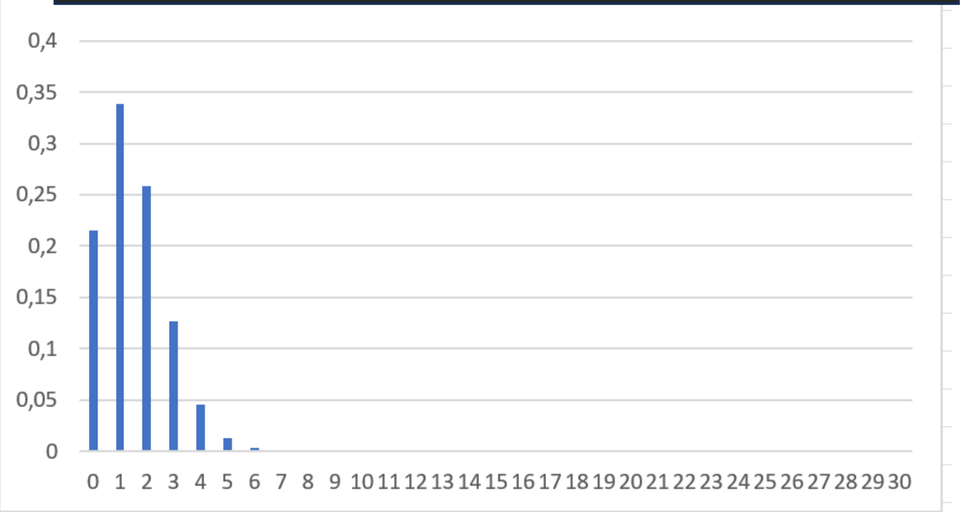
1- Calculer la probabilité $p(X = 3)$ d'obtenir 3 pièces défectueuses dans l'échantillon prélevé :

2- Calculer la probabilité $p(X = 15)$ d'obtenir 15 pièces défectueuses dans l'échantillon prélevé :

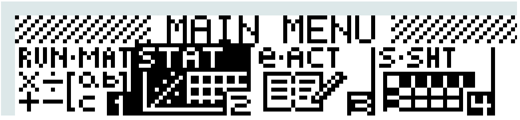
Les calculs de ces probabilités deviennent rapidement fastidieux car les coefficients binomiaux peuvent avoir des valeurs extrêmement grandes et les probabilités peuvent prendre des valeurs extrêmement petites. L'utilisation des tableurs (*Excel* par exemple) ou des modules de loi binomiale proposés sur les calculatrices, deviennent alors nécessaires. Par exemple dans ce cas précis de la loi binomiale $\mathcal{B}(30\ ,0.05)$ , le tableur Excel peut nous donner directement les résultats suivants :

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | ***k*** | ***p(x=k)*** |
| 2 | 0 | 0,21463876 |
| 3 | 1 | 0,33890331 |
| 4 | 2 | 0,25863674 |
| 5 | 3 | 0,12704963 |
| 6 | 4 | 0,04513605 |
| 7 | 5 | 0,01235302 |
| 8 | 6 | 0,002709 |
| 9 | 7 | 0,00048884 |
| 10 | 8 | 7,3969E-05 |
| 11 | 9 | 9,5165E-06 |
| 12 | 10 | 1,0518E-06 |
| 13 | 11 | 1,0065E-07 |
| 14 | 12 | 8,3878E-09 |
| 15 | 13 | 6,1126E-10 |
| 16 | 14 | 3,9065E-11 |
| 17 | 15 | 2,1931E-12 |

Formule saisie ici : =LOI.BINOMIALE.N(A3;30;0,05;FAUX)



Pour retrouver les modules de loi binomiale sur calculatrice Casio 35 ou Ti93, on exécute les commandes suivantes :

<table>
<tr><th>CASIO Graph 35</th><th>TI 83</th></tr>
<tr><td>
Dans le menu STAT<br>

<br>
choisir DIST, puis BINM,<br>
puis Bpd pour les probas $p(X = k)$<br>
ou Bcd pour les probas $p(X \leq k)$<br>
et compléter. Par exemple pour avoir $p(X = 2)$ avec une loi $\mathcal{B}(30\ ,0.05)$ , on saisit :<br>
<pre>
Binomial  P.D
Data      :Variable
x         :2
Numtrial  :30
p         :0.05
</pre>
</td><td>
Touche distrib 
 :<br>
Choisir binomFdp( pour les probas $p(X = k)$<br>
ou binomFRép( pour les probas $p(X \leq k)$<br>
et compléter. Par exemple pour avoir $p(X = 2)$ avec une loi $\mathcal{B}(30\ ,0.05)$ , on saisit :<br>
<pre>
binomFdp
nbreEssais:30
p:0.05
valeur de x:2
</pre>
</td></tr>
</table>

## 8- ESPERANCE ET ECART-TYPE :

ESPERANCE : L'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire $X$ , est la valeur que prend en moyenne $X$. Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, on peut montrer que :

$$E(X) = n\,p$$

ECART-TYPE : Pour chaque échantillon constitué, on obtient une valeur de $X$. La dispersion de ces valeurs autour de la moyenne $E(X)$ est quantifiée par l'écart-type $\sigma(X)$. Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, on peut montrer que :

$$\sigma(X) = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$$

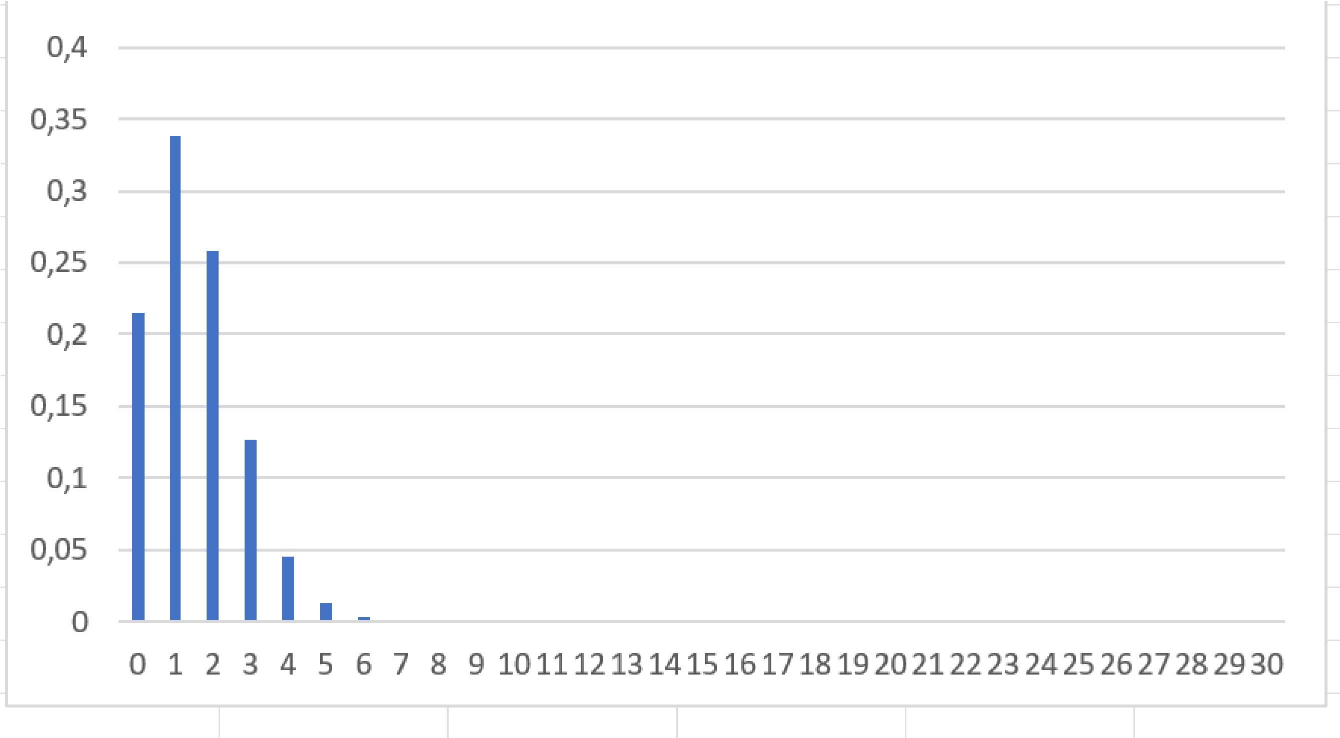
Si on reprend l'exemple de cours :

Enoncé : Une entreprise fabrique en très grande série une pièce technique. Le processus de fabrication n'est pas parfait et statistiquement, on a constaté que 5% des pièces avaient un défaut.
Pour vérifier que ce pourcentage ne s'aggrave pas, on constitue quotidiennement un échantillon de 30 pièces, en sortie de production (par tirage au sort).
On travaille ici sur une loi de probabilité $\mathcal{B}(30\ ,0.05)$ .

1- Calculer l’espérance de cette loi :

2- Calculer l’écart-type de cette loi :

3- Repérer ces 2 valeurs sur le diagramme donné ci-dessous :




4- Calculer l’espérance et l’écart-type lorsque l’on constitue à présent, un échantillon de 100 pièces :