

Chapitre 16 - Equations différentielles d'ordre 1

1- DEFINITION :

Définition :

Une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants est une équation de la forme $a y' + b y = c(t)$ dans laquelle :

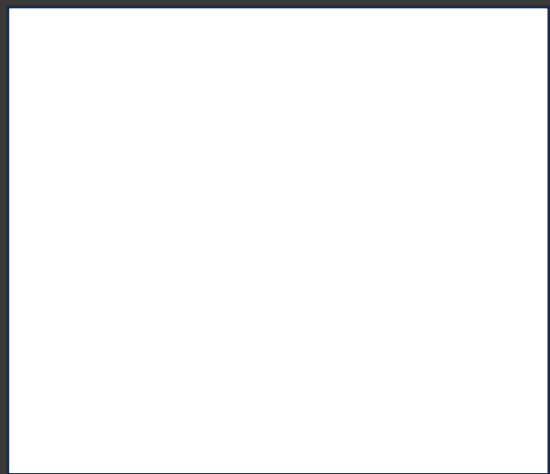
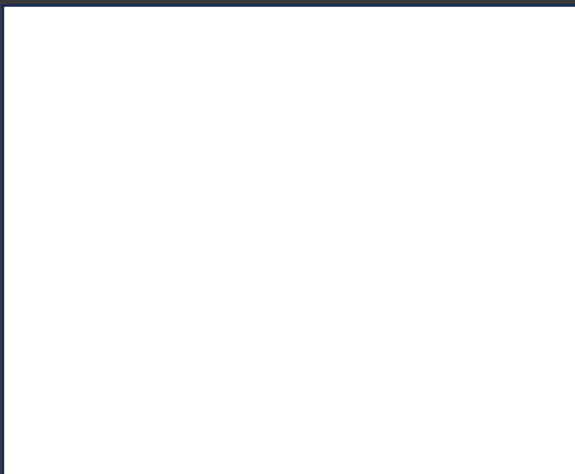
- L'inconnue est une fonction $y : t \rightarrow y(t)$ qui vérifie la relation $a y'(t) + b y(t) = c(t)$ pour toute valeur de t ,
- a et b sont des nombres réels,
- $c(t)$ une fonction de paramètre t . Cette fonction est appelée LE SECOND MEMBRE de l'équation différentielle.

2- RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DU TYPE $a y' + b y = c(t)$:

Méthode :

Une équation différentielle $a y' + b y = c(t)$ possèdent une infinité de fonctions $y(t)$ solutions. Elles s'écrivent toutes de la façon suivante :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$



PROPRIETE : Solutions d'une E.D. SANS SECOND MEMBRE

Une équation différentielle $a y' + b y = 0$ dans laquelle le second membre est égal à 0 possède une infinité de solutions qui sont du type :

$$y(t) = k e^{-\frac{b}{a}t}$$

k est un nombre réel quelconque. L'E.D. est vérifiée pour toutes fonctions du type $y(t) = k e^{-\frac{b}{a}t}$, quelle que soit la valeur de la constante k .

Vérification :

3- APPLICATION : SOLUTIONS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE $10 y' + y = 0$

$10 y' + y = 0$ est une équation différentielle **sans second membre** du type $a y' + b y = 0$ avec $a = 10$ et $b = 1$. D'après la propriété précédente, on peut dire que toute fonction y dont l'expression est $y(t) = k e^{-\frac{b}{a}t}$ est solution de l'E.D. $10 y' + y = 0$.

$$y(t) = k e^{-\frac{b}{a}t} = k e^{-\frac{1}{10}t} = k e^{-0.1 t}$$

Conclusion : L'équation différentielle $10 y' + y = 0$ a comme solutions, toutes les fonctions y dont l'expression est $y(t) = k e^{-0.1 t}$, k étant une nombre quelconque.

Vérification :

4- APPLICATION : SOLUTIONS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE $2y' + 4y = 6$

$2y' + 4y = 6$ est une équation différentielle **avec second membre** du type $ay' + by = c(t)$ avec $a = 2$, $b = 4$ et $c(t) = 6$.

D'après la méthode vue en cours, cette E.D. possède une infinité de fonctions solutions qui se décomposent de la façon suivante : $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

- $y_0(t)$ **sont les fonctions solutions** de l'E.D. $2y' + 4y = 0$ **sans** second membre :

$$y_0(t) = k e^{-\frac{b}{a}t} = k e^{-\frac{4}{2}t} = k e^{-2t}$$

- $y_p(t)$ est une fonction solution particulière de l'E.D. $2y' + 4y = 6$ **avec** second membre :

Quand la fonction $c(t)$ au second membre est une constante, on peut toujours trouver une solution particulière qui est une constante. Pour la trouver on peut poser $y_p(t) = C$, C étant un nombre inconnu pour l'instant. Pour que $y_p(t)$ soit solution de l'E.D., on doit ainsi avoir :

$$2y_p(t)' + 4y_p(t) = 6 \text{ pour toutes les valeurs du paramètre } t.$$

Comme $y_p(t) = C = \text{constante}$, on a $y_p'(t) = 0$ car la dérivée d'une constante est nulle.

La relation $2y_p(t)' + 4y_p(t) = 6$ devient donc :

$$2 \times 0 + 4y_p(t) = 6$$

$$4y_p(t) = 6$$

Et donc :

$$y_p(t) = \frac{6}{4} = 1,5$$

Finalement, les fonctions solutions de l'E.D. $2y' + 4y = 6$ sont de fonctions qui s'écrivent :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

Soit : $y(t) = k e^{-2t} + 1,5$ k étant une nombre quelconque.

Vérification :

5- APPLICATION : SOLUTIONS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE $2y' + 4y = 6t$

$2y' + 4y = 6t$ est une équation différentielle **avec second membre** du type $ay' + by = c(t)$ avec $a = 2$ et $b = 4$ et $c(t) = 6t$.

D'après la méthode vue en cours, cette E.D. possède une infinité de fonctions solutions qui se décomposent de la façon suivante : $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

- $y_0(t)$ **sont les fonctions solutions** de l'E.D. $2y' + 4y = 0$ **sans** second membre :

$$y_0(t) = k e^{-\frac{b}{a}t} = k e^{-\frac{4}{2}t} = k e^{-2t}$$

- $y_p(t)$ est une fonction solution particulière de l'E.D. $2y' + 4y = 6t$ **avec** second membre :

Quand la fonction $c(t)$ au second membre est une fonction affine, on peut généralement trouver une solution particulière qui soit également une fonction affine. Pour la trouver on peut poser $y_p(t) = A t + B$, A et B étant des nombres inconnus pour l'instant. Pour que $y_p(t)$ soit solution de l'E.D., on doit ainsi avoir $2 y_p'(t) + 4 y_p(t) = 6 t$ pour toutes les valeurs de t .

Comme $y_p(t) = A t + B$, on a $y_p'(t) = A$.

La relation $2 y_p'(t) + 4 y_p(t) = 6 t$ devient donc :

$$2 A + 4 (A t + B) = 6 t$$

$$2 A + 4 A t + 4 B = 6 t$$

Soit :

$$(2 A + 4 B) + 4 A t = 6 t$$

Pour que cette égalité soit vérifiée pour toutes les valeurs de t il est nécessaire d'avoir $\begin{cases} 2 A + 4 B = 0 \\ 4 A = 6 \end{cases}$

De $4 A = 6$, on en déduit que $A = \frac{6}{4} = 1,5$. De $2 A + 4 B = 0$, on en déduit que $4 B = -2 A$ et

$$\text{donc } B = \frac{-2 A}{4} = -\frac{2 \times 1,5}{4} = -0,75$$

La solution particulière trouvée est donc $y_p(t) = A t + B = 1,5 t - 0,75$

Finalement, les fonctions solutions de l'E.D. $2 y' + 4 y = 6 t$ sont de fonctions qui s'écrivent :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

Soit : $y(t) = k e^{-2 t} + 1,5 t - 0,75$ k étant un nombre quelconque.

Vérification par calcul manuel :

6- APPLICATION : SOLUTIONS DE L'E.D. $2 y' + 4 y = 6 t$ AVEC CONDITION INITIALE

L'équation différentielle $2 y' + 4 y = 6 t$ possède une infinité de solutions qui dépendent d'une variable k . Ces solutions s'écrivent $y(t) = k e^{-2 t} + 1,5 t - 0,75$

Dans de nombreuses applications scientifiques, on ne retient parmi ces solutions, que celle, unique, qui vérifie une condition initiale dans laquelle on donne la valeur $y(t)$ de la fonction y sur un temps t particulier. Par exemple si on recherche une solution de l'E.D. $2 y' + 4 y = 6 t$ qui vérifie $y(0) = 10$, la seule des solutions que l'on retient sera celle pour laquelle $y(0) = k e^{-2 \times 0} + 1,5 \times 0 - 0,75 = 10$

Cela donne : $k \times 1 - 0,75 = 10$

Soit : $k = 10 + 0,75 = 10,75$

La solution retenue sera donc :

$$y(t) = 10,75 e^{-2 t} + 1,5 t - 0,75$$