Chapitre 16 - Equations différentielles d’ordre 1

1- Definition :

Définition :

Une équation différentielle d’ordre 1 à coefficients constants est une équation de la forme $a\,y' + b\,y = c(t)$ dans laquelle :

- L’inconnue est une fonction $y : t \to y(t)$ qui vérifie la relation $a\,y'(t) + b\,y(t) = c(t)$ pour toute valeur de t,
- a et b sont des nombres réels,
- $c(t)$ une fonction de paramètre t . Cette fonction est appelée LE SECOND MEMBRE de l’équation différentielle.

2- Resolution d’une equation differentielle du type $\boldsymbol{a\,y' + b\,y = c(t)}$:

Méthode :

Une équation différentielle $a\,y' + b\,y = c(t)$ possèdent une infinité de fonctions $y(t)$ solutions. Elles s’écrivent toutes de la façon suivante :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

PROPRIETE : Solutions d'une E.D. SANS SECOND MEMBRE

Une équation différentielle $a\,y' + b\,y \;=\; 0$ dans laquelle le second membre est égal à 0 possède une infinité de solutions qui sont du type :

$$y(t) = k\,e^{-\frac{b}{a}t}$$

k est un nombre réel quelconque. L'E.D. est vérifiée pour toutes fonctions du type $y(t) = k\,e^{-\frac{b}{a}t}$, quelle que soit la valeur de la constante k.

Vérification :

3- APPLICATION : SOLUTIONS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE $10\,y' + \,y \;=\; 0$

$10\,y' + y = 0$ est une équation différentielle **sans second membre** du type $a\,y' + b\,y = 0$ avec $a = 10$ et $b = 1$. D'après la propriété précédente, on peut dire que toute fonction y dont l'expression est $y(t) = k\,e^{-\frac{b}{a}t}$ est solution de l'E.D. $10\,y' + y = 0$.

$$y(t) = k\,e^{-\frac{b}{a}t} = k\,e^{-\frac{1}{10}t} = k\,e^{-0.1\,t}$$

Conclusion : L'équation différentielle $10\,y' + y = 0$ a comme solutions, toutes les fonctions y dont l'expression est $y(t) = k\,e^{-0.1\,t}$, k étant une nombre quelconque.

Vérification :

4- APPLICATION : SOLUTIONS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE $2\,y' + 4\,y \;=\; 6$

$2\,y' + 4y = 6$ est une équation différentielle **avec second membre** du type $a\,y' + b\,y = c(t)$ avec $a = 2$, $b = 4$ et $c(t) = 6$.

D'après la méthode vue en cours, cette E.D. possède une infinité de fonctions solutions qui se décomposent de la façon suivante : $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

- $y_0(t)$ **sont les** fonctions **solutions** de l'E.D. $2\,y' + 4y = 0$ **sans** second membre :

$$y_0(t) \quad = \quad k\,e^{-\frac{b}{a}t} \quad = \quad k\,e^{-\frac{4}{2}t} \quad = \quad k\,e^{-2\,t}$$

- $y_p(t)$ est une fonction solution particulière de l'E.D. $2\,y' + 4y = 6$ **avec** second membre :

  Quand la fonction $c(t)$ au second membre est une constante, on peut toujours trouver une solution particulière qui est une constante. Pour la trouver on peut poser $y_p(t) = C$, C étant un nombre inconnu pour l'instant. Pour que $y_p(t)$ soit solution de l'E.D., on doit ainsi avoir :
  $2\,y_p(t)' + 4y_p(t) = 6$ pour toutes les valeurs du paramètre t.
  Comme $y_p(t) = C = constante$, on a $y_p{}'(t) = 0$ car la dérivée d'une constante est nulle.
  La relation $2\,y_p(t)' + 4y_p(t) = 6$ devient donc :

$$2\,\times 0 + 4y_p(t) = 6$$
$$4y_p(t) = 6$$

  Et donc :

$$y_p(t) = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

Finalement, les fonctions solutions de l'E.D. $2\,y' + 4y = 6$ sont de fonctions qui s'écrivent :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

Soit : $y(t) = k\,e^{-2\,t} +\ 1{,}5$ $\qquad k$ étant une nombre quelconque.

Vérification :

5- APPLICATION : SOLUTIONS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE $2\,y' + 4\,y \;=\; 6\,t$

$2\,y' + 4y = 6t$ est une équation différentielle **avec second membre** du type $a\,y' + b\,y = c(t)$ avec $a = 2$ et $b = 4$ et $c(t) = 6\,t$.

D'après la méthode vue en cours, cette E.D. possède une infinité de fonctions solutions qui se décomposent de la façon suivante : $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

- $y_0(t)$ **sont les** fonctions **solutions** de l'E.D. $2\,y' + 4y = 0$ **sans** second membre :

$$y_0(t) \quad = \quad k\,e^{-\frac{b}{a}t} \quad = \quad k\,e^{-\frac{4}{2}t} \quad = \quad k\,e^{-2\,t}$$

- $y_p(t)$ est une fonction solution particulière de l'E.D. $2\,y' + 4y = 6\,t$ **avec** second membre :

Quand la fonction $c(t)$ au second membre est une fonction affine, on peut généralement trouver une solution particulière qui soit également une fonction affine. Pour la trouver on peut poser $y_p(t) = A\,t + B$, A et B étant des nombres inconnus pour l'instant.Po ur que $y_p(t)$ soit solution de l'E.D., on doit ainsi avoir $2\,y_p(t)' + 4y_p(t) = 6\,t$ pour toutes les valeurs de t.

Comme $y_p(t) = A\,t + B$, on a $y_p{}'(t) = A$.
La relation $2\,y_p(t)' + 4y_p(t) = 6\,t$ devient donc :

$$2\,A + 4\,(At + B) = 6\,t$$

$$2\,A + 4\,A\,t + 4B = 6\,t$$

Soit :

$$(2\,A + 4B) + 4\,A\,t = 6\,t$$

Pour que cette égalité soit vérifiée pour toutes les valeurs de t il est nécessaire d'avoir $\begin{cases} 2\,A + 4B = 0 \\ 4\,A = 6 \end{cases}$

De $4\,A = 6$, on en déduit que $A = \frac{6}{4} = 1{,}5$. De $2\,A + 4B = 0$, on en déduit que $4B = -2A$ et donc $B = \frac{-2A}{4} = -\frac{2\times 1{,}5}{4} = -0{,}75$

La solution particulière trouvée est donc $y_p(t) = A\,t + B = 1{,}5\,t - 0{,}75$

Finalement, les fonctions solutions de l'E.D. $2\,y' + 4y = 6t$ sont de fonctions qui s'écrivent :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t)$$

Soit : $y(t) = k\,e^{-2\,t} + 1{,}5\,t - 0{,}75$ k étant un nombre quelconque.

<u>Vérification par calcul manuel</u> :

6- <u>Application :</u> Solutions de l'E.D. $2\,y' + 4\,y = 6\,t$ avec condition initiale

L'équation différentielle $2\,y' + 4y = 6t$ possède une infinité de solutions qui dépendent d'une variable k. Ces solutions s'écrivent $y(t) = k\,e^{-2\,t} + 1{,}5\,t - 0{,}75$

Dans de nombreuses applications scientifiques, on ne retient parmi ces solutions, que celle, unique, qui vérifie une condition initiale dans laquelle on donne la valeur $y(t)$ de la fonction y sur un temps t particulier. Par exemple si on recherche une solution de l'E.D. $2\,y' + 4y = 6t$ qui vérifie $y(0) = 10$, la seule des solutions que l'on retient sera celle pour laquelle $y(0) = k\,e^{-2\times 0} + 1{,}5\times 0 - 0{,}75 = 10$

Cela donne : $k \times 1 - 0{,}75 = 10$

Soit : $k = 10 + 0{,}75 = 10{,}75$

La solution retenue sera donc :

$$y(t) = 10{,}75\,e^{-2\,t} + 1{,}5\,t - 0{,}75$$