RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

EXERCICE 1 : Résolution analytique d'une équation différentielle d'ordre 1

Résoudre l'équation différentielle $\mathbf{4\,y' + y = 5}$ avec comme condition initiale : $y(0) = 0$

1- Déterminer en fonction d'une constante k, les fonctions $y_0(t)$ solutions de l'E.D. sans second membre

⇨ Les fonctions y_0 sont les solutions de l'E.D. **sans** second membre est $4\,y' + y = 0$ **.**

On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions y_0 sont donc du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit :

$$y_0(t) = k\,e^{-\frac{1}{4}t} = K\,e^{-0{,}25\,t}$$

2- Déterminer une solution particulière $y_0(t)$, du type $y_p(t) = A$ de l'E.D. avec second membre, A étant une constante réelle à définir.

⇨ y_p est une solution particulière de l'E.D. **avec** second membre $4\,y' + y = 5$.
Comme le second membre est ici une constante, on peut trouver une solution particulière également constante dans le temps. On pose $y_p(t) = A$ et on remplace cette expression dans l'E.D. :

On a $y_p{}'(t) = 0$ car A est une constante. En remplaçant $y_p(t) = A$ dans l'E.D., on obtient :

$$4 \times 0 + A = 5$$

Soit : $A = 5$

Donc $y_p(t) = 5$ est une solution particulière de l'E.D. avec second membre

3- En déduire la fonction $f(t) = y_0(t) + y_p(t)$ qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$

Les fonctions y solutions s'écrivent sous la forme $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$
L'E.D. $\mathbf{4\,y' + y = 5}$ a donc comme solutions, des fonctions dont l'expression est :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = k\,e^{-0{,}25\,t} + 5$$

Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$ doit vérifier :

$$k\,e^{-0{,}25\times 0} + 5 = 0$$

Soit : $k\,e^{0} + 5 = 0$

Soit : $k \times 1 + 5 = 0$

Soit : $k = -5$

Finalement : $\boxed{y(t) = -5\,e^{-0{,}25\,t} + 5}$

EXERCICE 2 : Soit l'équation différentielle $\mathbf{4\,y' + y = 5}$ t avec comme condition initiale $y(0) = 0$

1- Déterminer en fonction d'une constante K, les fonctions $y_0(t)$ solutions de l'E.D. sans second membre

⇨ Les fonctions y_0 sont les solutions de l'E.D. **sans** second membre est $4\,y' + y = 0$ **.**

On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions y_0 sont donc du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit :

$$y_0(t) = k\,e^{-\frac{1}{4}t} = K\,e^{-0{,}25\,t}$$

2- Déterminer une solution particulière $y_p(t)$, du type $y_p(t) = At + B$ de l'E.D. avec second membre, A et B étant des constantes réelles à définir.

⇨ y_p est une solution particulière de l'E.D. **avec** second membre $4y' + y = 5$ t .
Comme le second membre est ici une fonction affine, on peut trouver une solution particulière qui soit également une fonction affine. On pose $y_p(t) = At + B$ et on remplace cette expression dans l'E.D. :

On a $y_p{}'(t) = A$. En remplaçant $y_p(t) = At + B$ dans l'E.D., on obtient :

$$4A + (At + B) = 5t$$

Ce qui donne : $4A + At + B = 5t$

Ce qui donne : $At + (4A + B) = 5t$

Pour que cette relation soit vraie pour tout temps t, on doit avoir :

$$\begin{cases} A = 5 \\ 4A + B = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne : $\begin{cases} A = 5 \\ 4A + B = 4 \times 5 + B = 20 + B = 0 \end{cases}$

Ce qui donne : $\begin{cases} A = 5 \\ B = -20 \end{cases}$

On a donc : $y_p(t) = 5\,t - 20$

3- En déduire la fonction $f(t) = y_0(t) + y_p(t)$ qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$
L'E.D. $\mathbf{4y' + y = 5\,t}$ a donc comme solutions, des fonctions dont l'expression est :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = k\,e^{-0,25t} + 5t - 20$$

Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$ doit vérifier :

$$k\,e^{-0,25\times 0} + 5 \times 0 - 20 = 0$$

Soit : $k\,e^{0} - 20 = 0$
Soit : $k = 20$

Finalement : $\boxed{y(t) = 20\,e^{-0,25\,t} + 5t - 20}$

EXERCICE 3 : Soit l'équation différentielle $\mathbf{4\,y' + \;y = 5} \; = \sin{(t)}$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$

1- Déterminer en fonction d'une constante K, les fonctions $y_0(t)$ solutions de l'E.D. sans second membre
⇨ Les fonctions y_0 sont les solutions de l'E.D. **sans** second membre est $4\,y' + \;y = 0$ **.**
On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions y_0 sont donc du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit :

$$y_0(t) = k\,e^{-\frac{1}{4}t} = K\,e^{-0,25\,t}$$

2- Déterminer une solution particulière $y_p(t)$, du type $y_p(t) = Acos(t) + Bsin(t)$ de l'E.D. avec second membre, A et B étant des constantes réelles à définir.

⇨ y_p est une solution particulière de l'E.D. **avec** second membre $4y' + 2y = \sin(t)$.
Comme le second membre est ici une fonction sinusoïdale, on peut trouver une solution particulière qui soit également une fonction sinusoïdale. On pose $y_p(t) = A\,cos(t) + B\,sin(t)$ et on remplace cette expression dans l'E.D. :

On a $y_p'(t) = -A\sin(t) + B\,cos(t)$. En remplaçant $y_p(t) = A\,cos(t) + B\,sin(t)$ dans l'E.D., on obtient :

$$4(-A\sin(t) + B\,cos(t)) + (A\,cos(t) + B\,sin(t)) = \sin(t)$$

Ce qui donne :

$$\sin(t)(-4A + B) + \cos(t)(4B + A) = \sin(t)$$

Pour que cette relation soit vraie pour tout temps t, on doit avoir :

$$\begin{cases} -4A + B = 1 \\ 4B + A = 0 \end{cases}$$

La deuxième relation donne $A = -4B$.

En remplaçant dans la première, on obtient :

$$-4A + B = 1$$

$$-4 \times (-4B) + B = 1$$

$$16B + B = 1$$

$$17\,B = 1$$

$$B = \frac{1}{17}$$

La deuxième relation donne alors $A = -4B = \frac{-4}{17}$.

L'E.D. $\mathbf{4y' + y = \sin(t)}$ a donc comme solutions, des fonctions dont l'expression est :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = k\,e^{-0{,}25t} - \frac{4}{17}\cos(t) + \frac{1}{17}\sin(t)$$

3- En déduire la fonction $f(t) = y_0(t) + y_p(t)$ qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$
Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$ doit vérifier :

$$k\,e^0 - \frac{4}{17}\cos(0) + \frac{1}{17}\sin(0) = 0$$

$$k\,e^0 - \frac{4}{17} = 0$$

$$k = \frac{4}{17}$$

Finalement : $$\boxed{y(t) = \frac{4}{17}e^{-2\,t} - \frac{4}{17}\cos(t) + \frac{1}{17}\,sin(t)}$$