RESOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

EXERCICE 1 : Résolution analytique d'une équation différentielle d'ordre 1

On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation au temps $t = 0$. La température y est alors de 20°C. La température extérieure est constante et égale à 11°C. On définit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(t)$ la température de cette pièce en °C, au temps $t > 0$ exprimé en heures.

Les principes de la physique permettent d'établir que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$\mathbf{2\,y' + 0,24\,y = 2,64} \quad \text{avec comme condition initiale : } f(0) = 20$$

1- Déterminer en fonction d'une constante K, les fonctions $y_0(t)$ solutions de l'E.D. sans second membre

⇨ Les fonctions y_0 sont les solutions de l'E.D. **sans** second membre est $2\,y' + 0{,}24\,y = 0$ **.**

On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions y_0 sont donc du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit :

$$y_0(t) = k\,e^{-\frac{0{,}24}{2}t} = K\,e^{-0{,}12\,t}$$

2- Déterminer une solution particulière $y_0(t)$, du type $y_p(t) = A$ de l'E.D. avec second membre, A étant une constante réelle à définir.

⇨ y_p est une solution particulière de l'E.D. **avec** second membre $2\,y' + 0{,}24\,y = 2{,}64$.
Comme le second membre est ici une constante, on peut trouver une solution particulière également constante dans le temps. On pose $y_p(t) = A$ et on remplace cette expression dans l'E.D. :

On a $y_p{}'(t) = 0$ car A est une constante. En remplaçant $y_p(t) = A$ dans l'E.D., on obtient :

$$2 \times 0 + 0{,}24\,A = 2{,}64$$

Soit : $0{,}24\,A = 2{,}64$

Soit : $A = \frac{2{,}64}{0{,}24} = 11$

Donc $y_p(t) = 11$ est une solution particulière de l'E.D. avec second membre

3- En déduire la fonction $f(t) = y_0(t) + y_p(t)$ qui respecte la condition initiale $f(0) = 20$

Les fonctions y solutions s'écrivent sous la forme $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$
L'E.D. $\mathbf{2\,y' + 0,24\,y = 2,64}$ a donc comme solutions, des fonctions dont l'expression est :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = k\,e^{-0{,}12\,t} + 11$$

Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 20$ doit vérifier :

$$k\,e^{-0{,}12 \times 0} + 11 = 20$$

Soit : $k\,e^{0} + 11 = 20$

Soit : $k \times 1 + 11 = 20$

Soit : $k = 9$

Finalement : $\boxed{y(t) = 9\,e^{-0{,}12\,t} + 11}$

EXERCICE 2 : Soit l'équation différentielle $y' + 2y = -4t$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$

1- Déterminer en fonction d'une constante K, les fonctions $y_0(t)$ solutions de l'E.D. sans second membre

⇨ Les fonctions y_0 sont les solutions de l'E.D. **sans** second membre est $y' + 2\,y = 0$ **.**

On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions y_0 sont donc du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit :

$$y_0(t) = k\,e^{-\frac{2}{1}t} = K\,e^{-2\,t}$$

2- Déterminer une solution particulière $y_p(t)$, du type $y_p(t) = At + B$ de l'E.D. avec second membre, A et B étant des constantes réelles à définir.

⇨ y_p est une solution particulière de l'E.D. **avec** second membre $y' + 2y = -4$t .
Comme le second membre est ici une fonction affine, on peut trouver une solution particulière qui soit également une fonction affine. On pose $y_p(t) = At + B$ et on remplace cette expression dans l'E.D. :

On a $y_p'(t) = A$. En remplaçant $y_p(t) = At + B$ dans l'E.D., on obtient :

$$A + 2(At + B) = -4t$$

Ce qui donne : $A + 2At + 2B = -4t$

Ce qui donne : $2At + (A + 2B) = -4t$

Pour que cette relation soit vraie pour tout temps t, on doit avoir :

$$\begin{cases} 2A = -4 \\ A + 2B = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne : $\begin{cases} A = \frac{-4}{2} = -2 \\ A + 2B = -2 + 2B = 0 \end{cases}$

Ce qui donne : $\begin{cases} A = -2 \\ 2B = 2 \end{cases}$ soit : $\begin{cases} A = -2 \\ B = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$

On a donc : $y_p(t) = -2\,t + 1$

3- En déduire la fonction $f(t) = y_0(t) + y_p(t)$ qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$

L'E.D. $\boldsymbol{y' + 2y = -4}$**t** a donc comme solutions, des fonctions dont l'expression est :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = k\,e^{-2t} - 2t + 1$$

Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$ doit vérifier :

$$k\,e^{-2{,}5\times 0} - 2\times 0 + 1 = 0$$

Soit : $k\,e^0 + 1 = 0$

Soit : $k = -1$

Finalement : $\boxed{y(t) = -\,e^{-2\,t} - 2t + 1}$

EXERCICE 3 : Soit l'équation différentielle $y' + 2y = \cos(t)$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$

1- Déterminer en fonction d'une constante K, les fonctions $y_0(t)$ solutions de l'E.D. sans second membre

⇨ Les fonctions y_0 sont les solutions de l'E.D. **sans** second membre est $y' + 2\,y = 0$ **.**

On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions y_0 sont donc du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit :

$$y_0(t) = k\,e^{-\frac{2}{1}t} = K\,e^{-2\,t}$$

2- Déterminer une solution particulière $y_p(t)$, du type $y_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ de l'E.D. avec second membre, A et B étant des constantes réelles à définir.

⇨ y_p est une solution particulière de l'E.D. **avec** second membre $y' + 2\,y = \cos(t)$.

Comme le second membre est ici une fonction sinusoïdale, on peut trouver une solution particulière qui soit également une fonction sinusoïdale. On pose $y_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ et on remplace cette expression dans l'E.D. :

On a $y_p'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t)$. En remplaçant $y_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ dans l'E.D., on obtient :

$$(-A\sin(t) + B\cos(t)) + 2(A\cos(t) + B\sin(t)) = \cos(t)$$

Ce qui donne : $\sin(t)\,(-A + 2B) + \cos(t)(B + 2A) = \cos(t)$

Pour que cette relation soit vraie pour tout temps t, on doit avoir :

$$\begin{cases} -A + 2B = 0 \\ B + 2A = 1 \end{cases}$$

Ce qui donne : $\begin{cases} A = 2B \\ B + 2A = 1 \end{cases}$

La deuxième relation donne $B + 2 \times 2B = 1$ soit $5B = 1$ soit $B = \frac{1}{5} = 0{,}2$

En remplaçant dans la première, on obtient : $A = 2B = 2 \times 0{,}2 = 0{,}4$

L'E.D. $\mathbf{y' + 2y = \cos(t)}$ a donc comme solutions, des fonctions dont l'expression est :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = k\,e^{-2t} + 0{,}4\cos(t) + 0{,}2\sin(t)$$

3- En déduire la fonction $f(t) = y_0(t) + y_p(t)$ qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$

Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$ doit vérifier :

$$k\,e^{-2\times 0} + 0{,}4\cos(0) + 0{,}2\sin(0) = 0$$

$$k + 0{,}4 \times 1 + 0{,}2 \times 0 = 0$$

$$k + 0{,}4 = 0$$

$$k = -0{,}4$$

Finalement : $\boxed{y(t) = -0{,}4\,e^{-2\,t} + 0{,}4\cos(t) + 0{,}2\sin(t)}$

EXERCICE 4 : Résolution analytique d'une équation différentielle d'ordre 1

Résoudre l'équation différentielle $\mathbf{2\,y' + 5\,y = 3}$ avec comme condition initiale : $y(0) = 0$

Les fonctions y solutions s'écrivent sous la forme $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

⇨ Les fonctions y_0 sont les solutions de l'E.D. **sans** second membre est $2\,y' + 5\,y = 0$ **.**

On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions y_0 sont donc du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit :

$$y_0(t) = k\,e^{-\frac{5}{2}t} = K\,e^{-2,5\,t}$$

⇨ y_p est une solution particulière de l'E.D. **avec** second membre $2\,y' + 5\,y = 3$.

Comme le second membre est ici une constante, on peut trouver une solution particulière également constante dans le temps. On pose $y_p(t) = A$ et on remplace cette expression dans l'E.D. :

On a $y_p{}'(t) = 0$ car A est une constante. En remplaçant $y_p(t) = A$ dans l'E.D., on obtient :

$$2 \times 0 + 5\,A = 3$$

Soit : $5\,A = 3$

Soit : $A = \frac{3}{5} = 0,6$

Donc $y_p(t) = 0,6$ est une solution particulière de l'E.D. avec second membre.

L'E.D. $\mathbf{2\,y' + 5\,y = 3}$ a donc comme solutions, des fonctions dont l'expression est :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = k\,e^{-2,5t} + 0,6$$

Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$ doit vérifier :

$$k\,e^{-2,5\times 0} + 0,6 = 0$$

Soit : $k\,e^{0} + 0,6 = 0$

Soit : $k \times 1 + 0,6 = 0$

Soit : $k = -0,6$

Finalement : $y(t) = -0,6\,e^{-2,5\,t} + 0,6 = 0,6(1 - e^{-2,5\,t})$

EXERCICE 5 : Soit l'équation différentielle $\mathbf{2y' + 5y = 3t + 1}$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$

Les fonctions y solutions s'écrivent sous la forme $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

⇨ Les fonctions y_0 sont les solutions de l'E.D. **sans** second membre est $2\,y' + 5\,y = 0$ **.**

On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions y_0 sont donc du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit :

$$y_0(t) = k\,e^{-\frac{5}{2}t} = K\,e^{-2,5\,t}$$

⇨ y_p est une solution particulière de l'E.D. **avec** second membre $2\,y' + 5\,y = 3\mathrm{t} + 1$.
Comme le second membre est ici une fonction affine, on peut trouver une solution particulière qui soit également une fonction affine. On pose $y_p(t) = At + B$ et on remplace cette expression dans l'E.D. :

On a $y_p{}'(t) = A$. En remplaçant $y_p(t) = At + B$ dans l'E.D., on obtient :

$$2A + 5(At + B) = 3t + 1$$

Ce qui donne : $2A + 5At + 5B = 3t + 1$

Ce qui donne : $5At + (2A + 5B) = 3t + 1$

Pour que cette relation soit vraie pour tout temps t, on doit avoir :

$$\begin{cases} 5A = 3 \\ 2A + 5B = 1 \end{cases}$$

Ce qui donne : $\begin{cases} A = \frac{3}{5} = 0{,}6 \\ 2A + 5B = 2 \times 0{,}6 + 5B = 1{,}2 + 5B = 1 \end{cases}$

Ce qui donne : $\begin{cases} A = 0{,}6 \\ 5B = -0{,}2 \end{cases}$ soit : $\begin{cases} A = 0{,}6 \\ B = \frac{-0{,}2}{5} = -0{,}04 \end{cases}$

On a donc : $y_p(t) = 0{,}6\,t - 0{,}04$

L'E.D. $\mathbf{2\,y' + 5\,y = 3t + 1}$ a donc comme solutions, des fonctions dont l'expression est :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = k\,e^{-2{,}5t} + 0{,}6t - 0{,}04$$

Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$ doit vérifier :

$$k\,e^{-2{,}5\times 0} + 0{,}6 \times 0 - 0{,}04 = 0$$

Soit : $k\,e^{0} - 0{,}04 = 0$

Soit : $k = 0{,}04$

Finalement : $\boxed{y(t) = -0{,}04\,e^{-2{,}5\,t} + 0{,}6t + 0{,}04}$

<u>EXERCICE 6</u> : Soit l'équation différentielle $\mathbf{2y' + 5y = \sin(t)}$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$

Les fonctions y solutions s'écrivent sous la forme $y(t) = y_0(t) + y_p(t)$

⇨ Les fonctions y_0 sont les solutions de l'E.D. **sans** second membre est $2\,y' + 5\,y = 0$ **.**

On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions y_0 sont donc du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit :

$$y_0(t) = k\,e^{-\frac{5}{2}t} = K\,e^{-2{,}5\,t}$$

⇨ y_p est une solution particulière de l'E.D. **avec** second membre $2\,y' + 5\,y = \sin(\mathrm{t})$.

Comme le second membre est ici une fonction sinusoïdale, on peut trouver une solution particulière qui soit également une fonction sinusoïdale. On pose $y_p(t) = A\,sin(t) + B\,cos(t)$ et on remplace cette expression dans l'E.D. :

On a $y_p'(t) = A\,cos(t) - B\sin(t)$. En remplaçant $y_p(t) = A\,sin(t) + B\,cos(t)$ dans l'E.D., on obtient :

$$2(A\,cos(t) - B\sin(t)) \ + 5(A\,sin(t) + B\cos(t)) = \sin(t)$$

Ce qui donne : $$\sin(t)\,(-2B + 5A) + \cos(t)(2A + 5B) \quad = \quad 1 \times \sin(t) \ + \ 0 \times \cos(t)$$

Pour que cette relation soit vraie pour tout temps t, on doit avoir :

$$\begin{cases} -2B + 5A = 1 \\ 2A + 5B = 0 \end{cases}$$

Ce qui donne : $$\begin{cases} -2B + 5A = 1 \\ 5B = -2A \end{cases}$$

La deuxième relation donne $B = \frac{-2}{5} = -0{,}4\,A$

En remplaçant dans la première, on obtient :

$$-2B + 5A = 1$$

$$-2 \times (-0{,}4\,A) + 5A = 1$$

$$0{,}8A + 5A = 1$$

$$5{,}8\,A = 1$$

$$A = \frac{1}{5{,}8} = \frac{10}{58} = \frac{5}{29} \approx 0{,}172$$

On en déduit ainsi la valeur de $B = -0{,}4\,A = -0{,}4 \times \frac{5}{29} = -\frac{4}{10} \times \frac{5}{29} = -\frac{4}{2} \times \frac{1}{29} = -\frac{2}{29} \approx 0{,}069$

L'E.D. $\mathbf{2\,y' + 5\,y = \sin(t)}$ a donc comme solutions, des fonctions dont l'expression est :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = k\,e^{-2{,}5t} + \frac{5}{29}\sin(t) - \frac{2}{29}\cos(t)$$

Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$ doit vérifier :

$$k\,e^{-2{,}5\times 0} + \frac{5}{29}\sin(0) - \frac{2}{29}\cos(0) = 0$$

$$k\,e^{-2{,}5\times 0} + \frac{5}{29} \times 0 - \frac{2}{29} \times 1 = 0$$

$$k \ - \frac{2}{29} = 0$$

$$k = \frac{2}{29}$$

Finalement : $$\boxed{y(t) = \frac{2}{29}e^{-2{,}5\,t} + \frac{5}{29}\sin(t) - \frac{2}{29}\cos(t)}$$