EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE 1

EXERCICE 1. : Calcul de dérivées

Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

a- $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$
b- $g(x) = 4\,e^x$
c- $h(t) = 3\,e^{-2{,}5t}$ et $h(t) = 3\,e^{-t}$
d- $i(t) = 2\cos(t)$
e- $j(t) = 2\sin(-2{,}5\,t)$ et $j(t) = 2\sin(-\,t)$

EXERCICE 2. : E.D. d'ordre 1 sans second membre

Déterminer les fonctions $y(t)$ solutions des équations différentielles :

a- $2\,y' + 5y = 0$
b- $y' + y = 0$

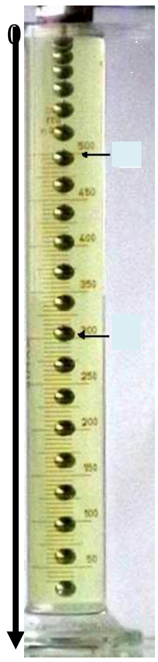
EXERCICE 3. : Injection médicament

A l'instant $t = 0$, on injecte à un malade une substance médicamenteuse qui est ensuite progressivement éliminée. On désigne par $c(t)$ la concentration de la substance en mg/L dans le sang, présente à l'instant t, exprimé en heures. On suppose qu'à chaque instant t, la vitesse d'élimination c'(t) est proportionnelle à la concentration restante dans le sang du malade. Cette hypothèse se traduit mathématiquement par l'équation différentielle (E) : $2\,y' + 0.4y = 0$

A l'instant $t = 0$, c(0) = 80 mg/L

1- Déterminer la fonction $c(t)$ solution de l'équation (E) et qui satisfait à la condition initiale énoncée.
2- Tracer la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle [0 , 24] heures (1cm = 2 heures – 1cm = 10 mg/L)
3- Déterminer la limite $\lim_{t\to\infty} c(t)$ par lecture graphique. Justifier la valeur trouvée à partir de l'expression de $c(t)$
4- Au bout de combien d'heures la concentration de substance est-elle inférieure à 10 % de sa valeur de départ ?

EXERCICE 4. Chute d'une bille dans une éprouvette pleine d'huile



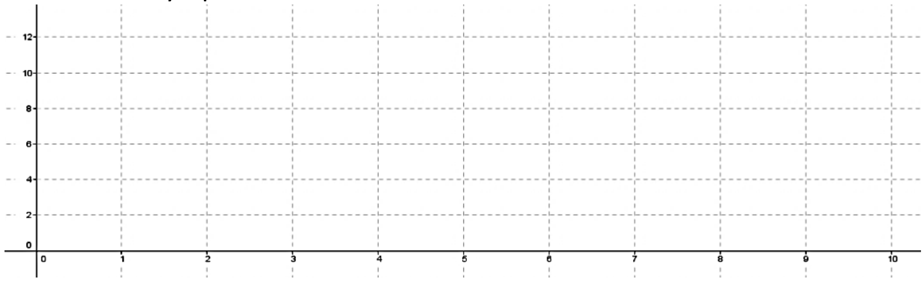
$x(t)$

A l'instant $t = 0$, une bille est lâchée sans vitesse initiale, dans une éprouvette de 80 cm de haut, remplie d'huile.

On note $v(t)$ la vitesse instantanée de cette bille en cm/s, au temps t, exprimé en secondes. On admet que la fonction v est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad 2\,y' + 5\,y = 60$

La bille étant lâchée sans vitesse initiale au temps $= 0$, on a : $v(0) = 0$

1- Déterminer la seule fonction $v(t)$ solution de (E) avec $v(0) = 0$
2- Tracer ci-dessous la courbe représentative de la fonction v sur l'intervalle $[0\ ;10]$. Définir les asymptotes.



3- Déterminer par résolution d'une équation, à quel instant t, la bille atteint 90 % de sa vitesse limite.

EXERCICE 5. : Soit l'équation différentielle $y' + 2y = -4t$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$

1- Déterminer en fonction d'une constante K, les fonctions $y_0(t)$ solutions de l'E.D. sans second membre
2- Déterminer une solution particulière $y_p(t)$, du type $y_p(t) = At + B$ de l'E.D. avec second membre, A et B étant des constantes réelles à définir.
3- En déduire la fonction $f(t) = y_0(t) + y_p(t)$ qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$
4- Tracer sur Géogébra, la courbe représentative de la fonction f

EXERCICE 6. : Soit l'équation différentielle $y' + 2y = \cos(t)$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$

1- Déterminer en fonction d'une constante K, les fonctions $y_0(t)$ solutions de l'E.D. sans second membre
2- Déterminer une solution particulière $y_p(t)$, du type $y_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$ de l'E.D. avec second membre, A et B étant des constantes réelles à définir.
3- En déduire la fonction $f(t) = y_0(t) + y_p(t)$ qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$