TD INTRODUCTION AUX EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE 1

Une casserole d'eau bouillante (température à 100 °C) est enlevée du feu, au temps $t = 0$, pour être placée à l'extérieure où la température est de 19 °C.

On voudrait trouver une fonction f définie par $f(t)$ = température de l'eau en °C, au temps t (en mn). La découverte de celle-ci permettrait **de prévoir** quelle sera la température de l'eau au cours du refroidissement.

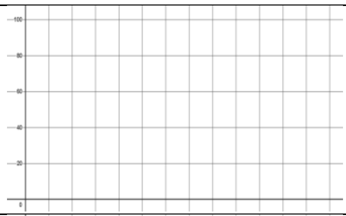
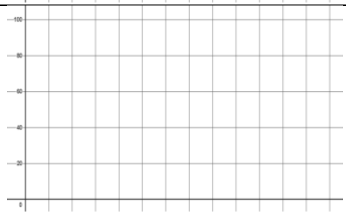
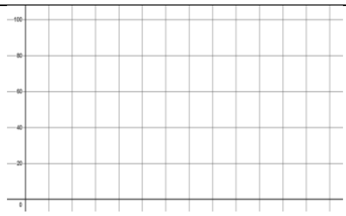
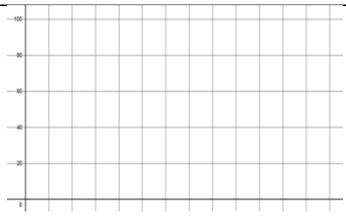
Pour trouver f, on utilise le principe physique suivant :

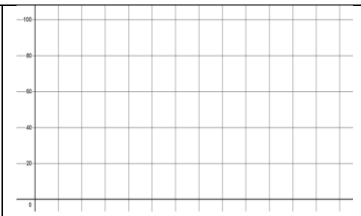
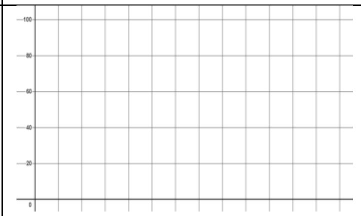
> « à chaque instant t , la vitesse instantanée de refroidissement de l'eau $f'(t)$ est proportionnelle à l'écart instantané de température $(f(t) - 19)$ entre l'eau et l'extérieur ». On a ainsi :
>
> $f'(t) = -0{,}1\,(f(t) - 19)$, soit $\boxed{\boldsymbol{f'(t) = -0{,}1\, f(t) + 1{,}9}}$
>
> Le coefficient de proportionnalité est ici de - 0,1 . Il dépend du volume d'eau et des surfaces d'échange thermique (*il est déterminé expérimentalement*)

Objectif : Trouver une fonction f qui permet de respecter la relation $\boldsymbol{f'(t) = -0{,}1\, f(t) + 1{,}9}$ pour n'importe qu'elles valeurs de t n'est pas évident. Dans une première approche, on se propose ici, pour les fonctions qui suivent, de voir si elles vérifient ou pas, la relation $f'(t) = -0{,}1\, f(t) + 1{,}9$ pour n'importe quelle valeur du temps t.

Pour chacune des fonctions proposées :

1- Tracer l'allure de la courbe
2- Calculer $f'(t)$ en fonction de t
3- Calculer $-0{,}1\, f(t) + 1{,}9$ en fonction de t
4- Vérifier si la relation $f'(t) = -0{,}1\, f(t) + 1{,}9$ est vérifiée pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$
5- Conclure : « Cette fonction est-elle celle qui permet de modéliser l'évolution de la température au cours du refroidissement ? »

$f(t) = -t + 100$		$f'(t) =$ $-0{,}1\, f(t) + 1{,}9 =$
$f(t) = t^2 - 20t + 100$		$f'(t) =$ $-0{,}1\, f(t) + 1{,}9 =$
$f(t) = 100 - \ln(t + 1)$		$f'(t) =$ $-0{,}1\, f(t) + 1{,}9 =$
$f(t) = e^{-0{,}1\,t} + 19$		$f'(t) =$ $-0{,}1\, f(t) + 1{,}9 =$

$f(t) = 2\, e^{-0{,}1\, t} + 19$		$f'(t) =$
		$-\, 0{,}1\, f(t) + 1{,}9 =$
$f(t) = 81\, e^{-0{,}1\, t} + 19$		$f'(t) =$
		$-\, 0{,}1\, f(t) + 1{,}9 =$