DS – Ciel2 IrEr

LOIS DE DENSITE

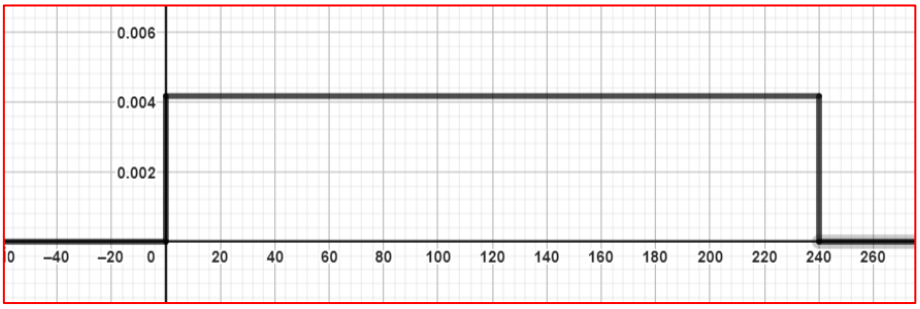
EXERCICE 1 : Temps d'attente à une station de métro *(4.5 points)*

Un élève arrive à l'arrêt du métro sans avoir consulté les horaires. A ce moment de la journée, un métro passe toutes les 4 minutes, soit 240 s. On note X la variable aléatoire donnant en **secondes**, le temps d'attente jusqu'à l'arrivée d'une rame. Le moment où cet élève arrive sur le quai étant complètement aléatoire, on suppose que X suit une loi uniforme $\mathcal{U}(a, b)$.

1- Donner l'intervalle $[a\,;b]$ de cette loi uniforme

Comme un métro passe toutes les 4 minutes, soit 240 s. Donc $0 < X < 240$. X suit donc une loi $\mathcal{U}(0\,, 240)$.

2- Tracer la représentation graphique de la fonction de densité f (1cm pour 20 s) et donner l'expression de $f(x)$



$f(x) = \frac{1}{240}$ $si\ 0 < x < 240$

$f(x) = 0$ $sinon$

3- Quelle probabilité a cet élève d'attendre moins de 3 s

$p(X < 3) = \int_0^3 f(x).dx$. Ce calcul est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses, pour $0 < x < 3$. On a donc $p(X < 3) = \frac{1}{240} \times 3 = \frac{3}{240} = 0.0125$

4- Quelle probabilité a cet élève d'attendre plus de 80 s

$p(X > 80) = \int_{80}^{240} f(x).dx$. Ce calcul est égal à l'aire du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses, pour $80 < x < 240$. On a donc $p(X > 80) = \frac{1}{240} \times (240 - 80) = \frac{160}{240} = \frac{2}{3} \approx 0.667$

5- Quelle probabilité a cet élève d'attendre précisément 120 s

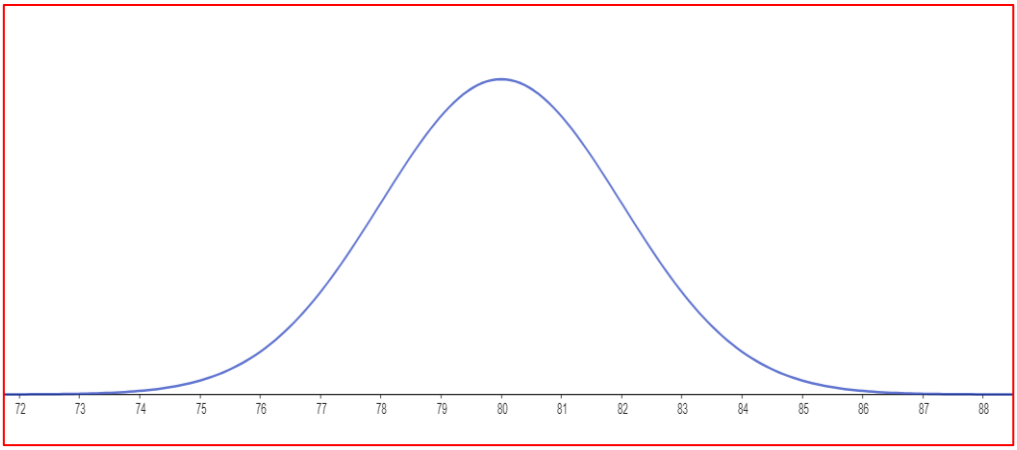
$p(X = 120) = \int_{120}^{120} f(x).dx$. On a donc $p(X = 120) = 0$

EXERCICE 2 : *Masse d'une pièce (7.5 points)*

Un atelier de fabrication produit des résistances électriques. On note X la variable aléatoire qui, à chaque résistance prélevée au hasard dans un lot important, associe sa résistance électrique en Ohm. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi Normale de moyenne $\mu = 80$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Les résultats approchés demandés dans la suite sont à arrondir à 10^{-2}.

1. Soit C_f la représentation graphique de la fonction de densité f de cette loi Normale. Tracer comme vu en cours, C_f sur l'intervalle [72 ; 88] en prenant comme unité graphique : 1 cm pour 1 Ohm



2. Sans utiliser de calculatrice, calculer les probabilités suivantes. Justifier en utilisant les propriétés 1, 2, 3 x σ.

a) $p(78 < X < 82)$

$$p(78 < X < 82) = p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.68$$

b) $p(X > 80)$

$$p(X > 80) = p(X > \mu) = 0.50$$

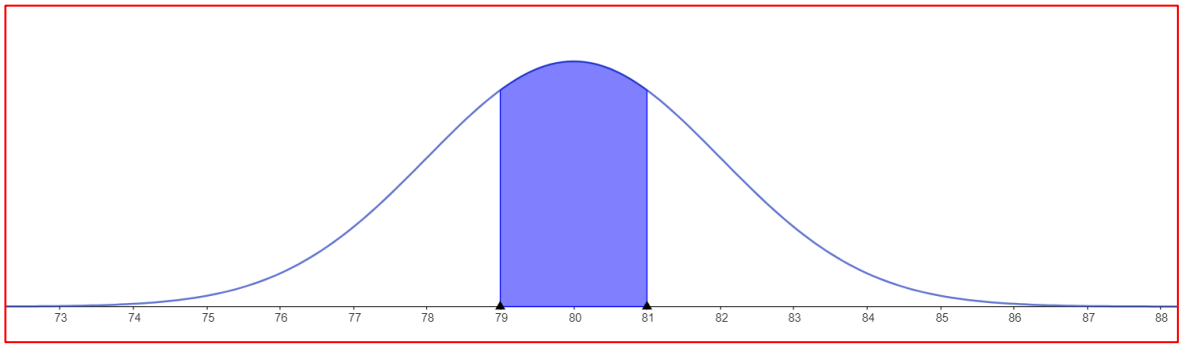
c) $p(X < 84)$

$$p(X < 84) = p(X < \mu) + \frac{p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)}{2}$$
$$\approx 0.50 + \frac{0.95}{2}$$
$$\approx 0.975$$

3. En utilisant la calculatrice, donner la probabilité que la résistance prélevée au hasard ait une résistance électrique comprise entre 79 et 81 Ohm. Nommer la procédure utilisée sur la calculatrice. Cette probabilité correspond à une aire sous la courbe de C_f . Colorier cette aire sur la courbe tracée.

En utilisant la procédure dédiée sur calculatrice, on obtient :

$$p(79 < X < 81) \approx 0.3829$$



EXERCICE 3 : Durée de vie des lampes *(8 points)*

X est la variable aléatoire qui, à toute lampe d'un certain type prélevée au hasard dans un stock important, associe sa durée de bon fonctionnement en heures. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0002$

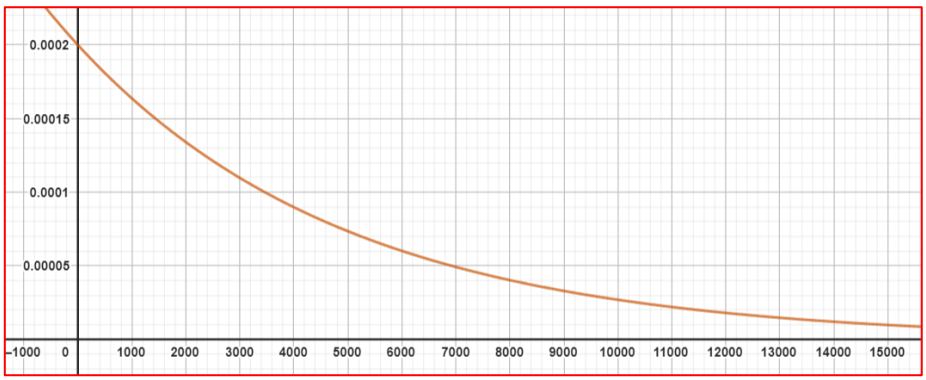
1. Définir la fonction de densité f de cette loi.

La fonction de densité est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x} = 0.0002\ \ e^{-0.0002\,x}$

2. Déterminer l'espérance $E(X)$ et donner une interprétation du résultat dans le contexte de l'énoncé.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.0002} = 5000\ h$$

3. Tracer l'allure de la courbe C_f représentative de f (comme vu en cours). Donner une graduation approximative des axes des abscisses et ordonnées.

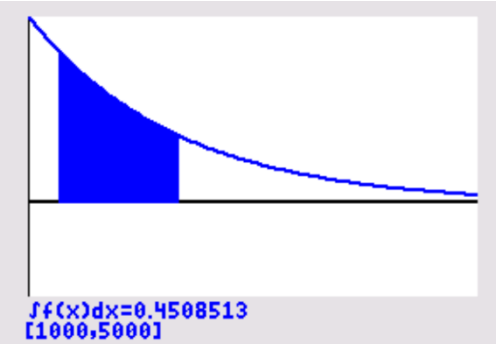


Soit les évènements suivants :
A : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est comprise entre 1000 h et 5000 h »,
B : « la durée de bon fonctionnement de la lampe prélevée est supérieure à 8000 h »,

4. Calculer la probabilité $p(A)$ en utilisant la procédure calcul intégral sur la calculatrice (arrondir au millième). Hachurer sur la courbe précédente l'aire du domaine sous la courbe qui est concerné.

$$p(A) = p(1000 < X < 5000)$$

$$p(A) = \int_{1000}^{5000} 0.0002\ e^{-0.0002\,x} \approx 0.451$$



5. Calculer la probabilité $p(B)$ (*arrondir à 10^{-3} près)* en utilisant à présent une primitive de f

$$p(B) = 1 - p(X < 8000)$$

$$p(B) = 1 - \int_{0}^{8000} 0.0002\ e^{-0.0002\,x}$$

$$p(B) = 1 - [-\ e^{-0.0002\,x}]_0^{8000}$$

$$p(B) = 1 - (-\ e^{-0.0002 \times 8000} - (-\ e^{-0.0002 \times 0}))$$

$$p(B) = 1 - (-\ e^{-1.6} - (-\ 1))$$

$$p(B) = 1 + \ e^{-1.6} - 1$$

$$p(B) = e^{-1.6} \approx 0.202$$

6. Un nouveau type de lampe est étudié. La durée de bon fonctionnement de ces nouvelles lampes est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ inconnu. Une étude statistique montre que 30% de ces lampes fonctionnent encore à $T = 8000\ h$, d'où : $p(T > 8000) = 0.3$. Calculer la valeur de λ (vous pourrez utiliser la démonstration de la question précédente).

$$p(T > 8000) = 0.3$$

$$e^{-8000\,\lambda} = 0.3$$

$$\ln(e^{-8000\,\lambda}) = \ln(0.3)$$

$$-8000\,\lambda = \ln(0.3)$$

$$\lambda = \frac{\ln(0.3)}{-8000} \approx 0.00015$$