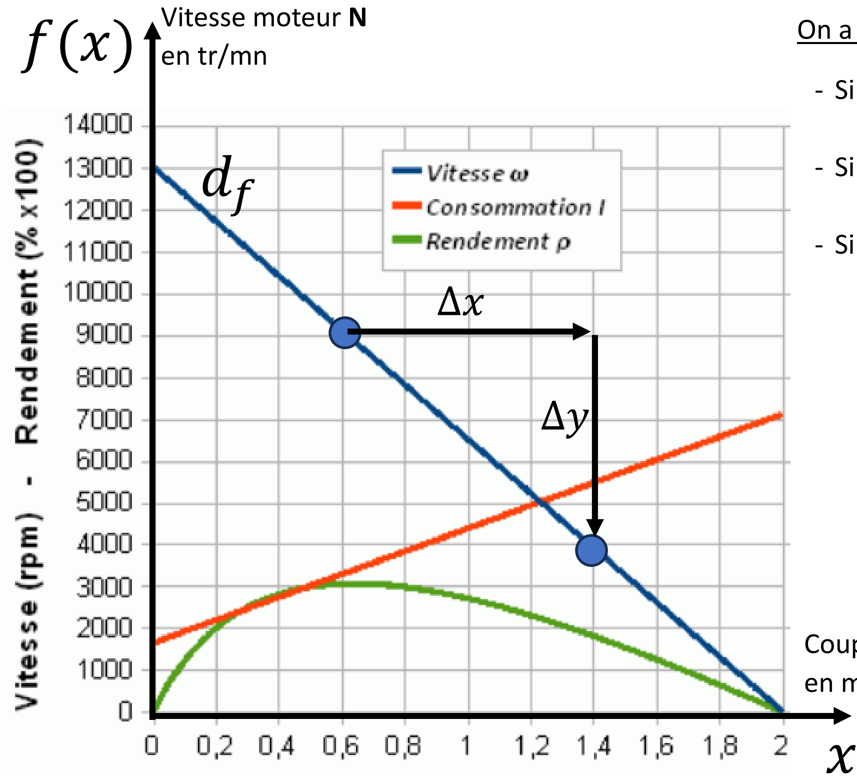
Chapitre 3 - Fonctions affines – Equations 1er degré

1- EXEMPLE D'INTRODUCTION :

La droite d_f ci-dessous, donne l'évolution de la vitesse N (*en trs/mn*) d'un moteur à courant continu lorsque le couple C (*en mN.m*) qui lui est appliqué varie.



On a comme mesures précises :

- Si $C = 0{,}6\ mNm$ alors $N = 9100\ trs/mn$
- Si $C = 1{,}4\ mNm$ alors $N = 3900\ trs/mn$
- Si $= 0\ nNm$ alors $N = 13000\ trs/mn$

Question : La droite d_f ci-dessus est la courbe représentative d'une fonction f . Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

La courbe représentative de la fonction f étant une droite, on a nécessairement $f(x) = ax + b$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x}$$

$$= \frac{3900 - 9100}{1{,}4 - 0{,}6}$$

$$= \frac{-5200}{0{,}8}$$

$$= -6500$$

$$b = f(0) = 13000$$

Donc finalement : $$f(x) = -6500\,x + 13000$$

Vérification : Calcul de la vitesse en trs/mn, si le couple appliqué est :

- de $1\ mNm$: $f(1) = -6500\ \times 1 + 13000 = 6500$
- de $0{,}4\ mNm$: $f(0{,}4) = -6500\ \times 0{,}4 + 13000 = 10400$
- de $1{,}6\ mNm$: $f(1{,}6) = -6500\ \times 1{,}6 + 13000 = 2600$

2- POINT COURS FONCTIONS AFFINES :

Définition :

⇨ L'expression d'une fonction affine est du type $f(x) = ax + b$, a et b étant des constantes réelles. a est appelé COEFFICIENT DIRECTEUR , b est appelé ORDONNEE A L'ORIGINE

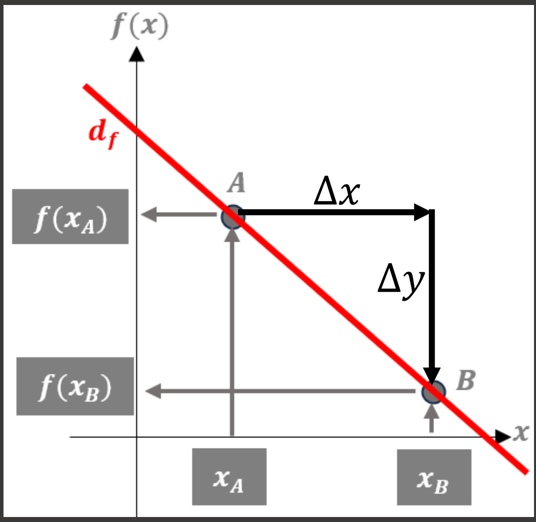
Trouver a et b :

⇨ Soit une fonction affine f. Si on connait les coordonnées de 2 points $A(x_A\,,f(x_A))$ et $B(x_B\,,f(x_B))$ de sa droite représentative, on peut calculer les valeurs des nombres a et b de la relation :

$$f(x) = a\,x + b$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$b = f(0)$$



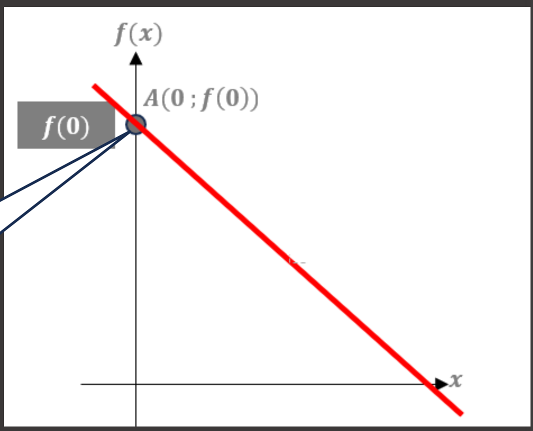
- Pour trouver la valeur du nombre a, on écrit :

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Pour trouver la valeur du nombre b, on écrit $b = f(x_A) - a\,x_A$

- Si $x_A = 0$, cette dernière relation donne : $b = f(0) - a \times 0 = f(0)$

$$b = f(0)$$



Sens de variation:

Le sens de variation d'une fonction affine $f(x) = a\,x + b$ dépend du signe du coefficient directeur a :

x	$-\infty$ $+\infty$
Variation de $f(x) = ax + b$	a est POSITIF ↗

x	$-\infty$ $+\infty$
Variation de $f(x) = ax + b$	a est NEGATIF ↘

Tableau de signe :

Pour tracer le tableau de signe d'une fonction affine $f(x) = a\,x + b$ on commence par résoudre l'équation $f(x) = 0$. Le tableau de signe de f est alors l'un des 2 ci-dessous :

$ax + b = 0$ si $x = \frac{-b}{a}$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
Signe de $f(x) = ax + b$	-	0	+

a est POSITIF

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
Signe de $f(x) = ax + b$	+	0	-

a est NEGATIF

Equations 1er d° :

$$3\,x + 1 = x - 4$$
$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$
$$x = -2{,}5$$

Résoudre l'équation, cela consiste à réécrire l'égalité en la transformant à chaque ligne …. pour à la fin, retrouver l'inconnue x toute seule, uniquement dans un des 2 membres.

Et comment on transforme l'équation ? :

Les lignes que l'on écrit doivent absolument conserver l'égalité entre les 2 membres. Pour conserver cette égalité, on peut :

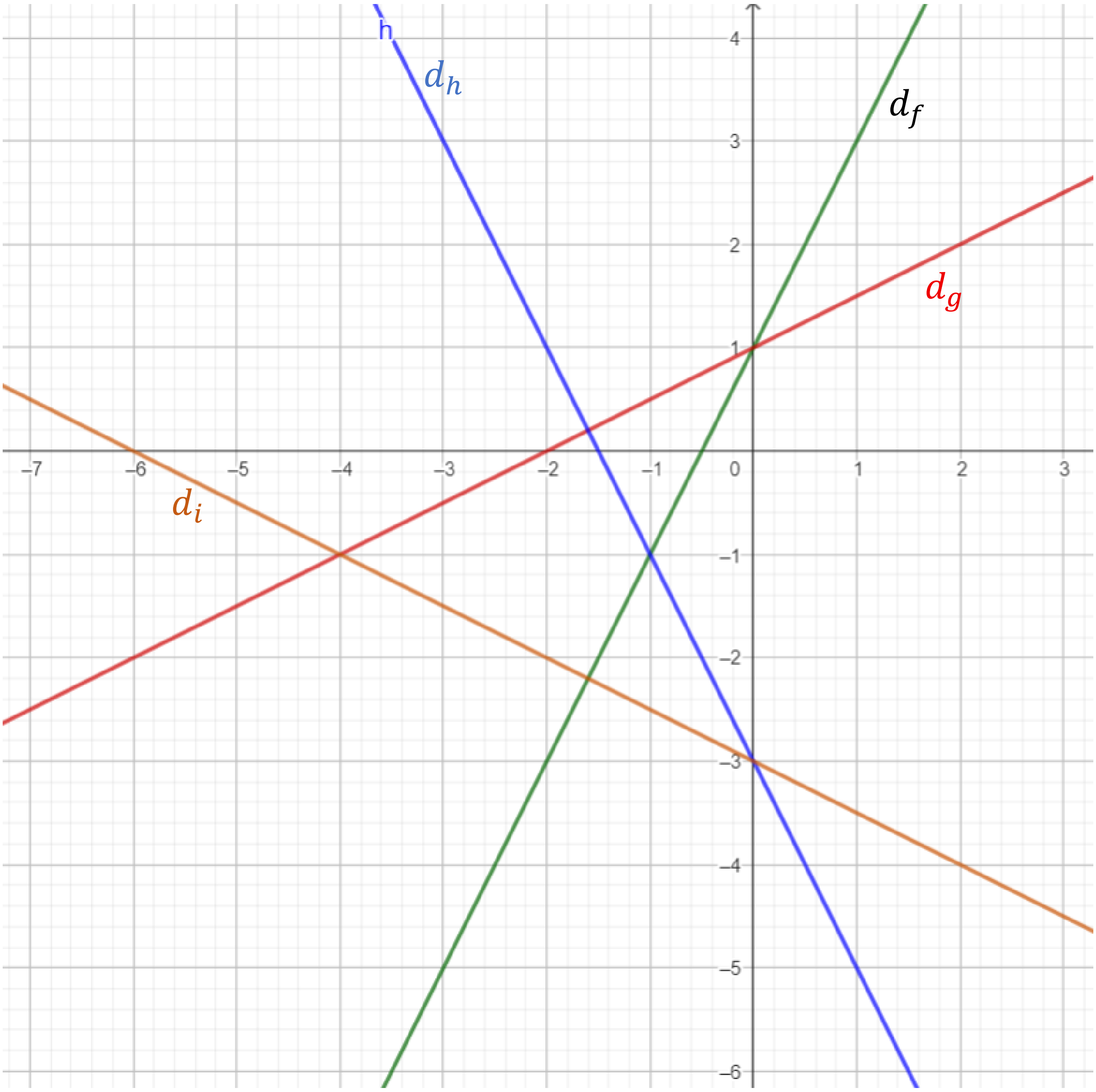
- AJOUTER ou SOUSTRAIRE un même nombre à tout le membre de gauche, à condition de faire également la même opération à tout le membre de droite.

- MULTIPLIER ou DIVISER par un même nombre, tout le membre de gauche, à condition de faire également la même opération sur tout le membre de droite.

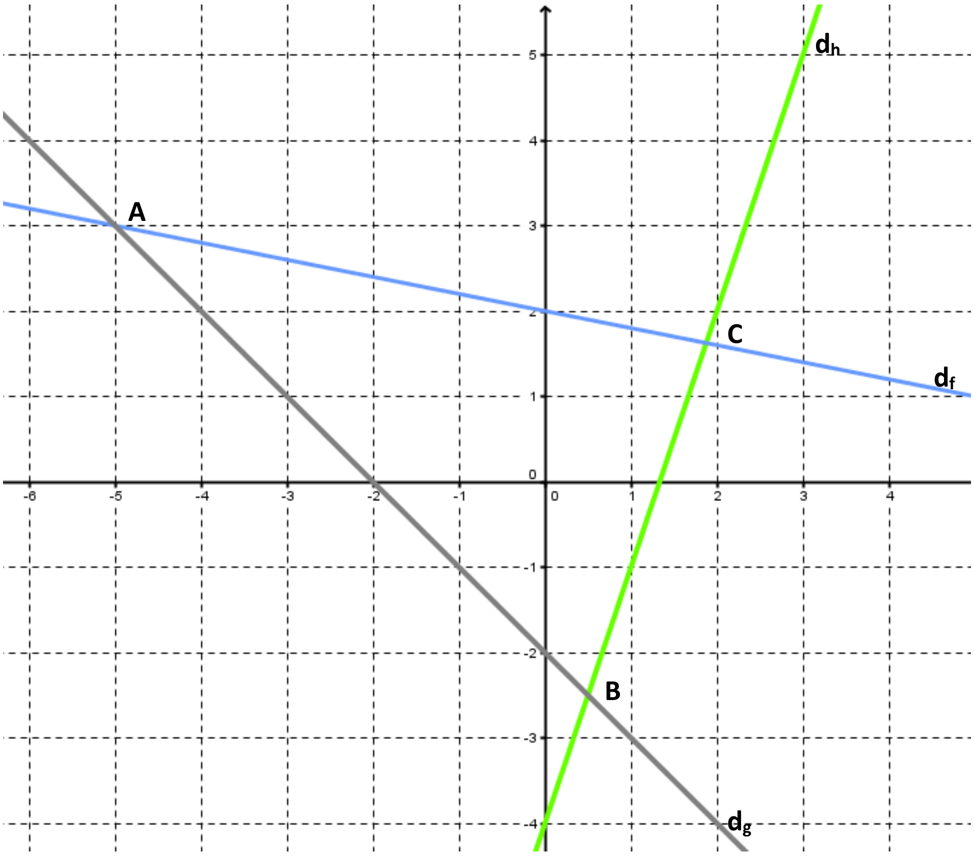
3- EXERCICES :

Exercice 1. : Pour chacune des fonctions suivantes, identifier le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine, puis tracer la droite correspondante avec comme fenêtre graphique $x \in [-7\,;3]$ et $-6 \leq y \leq 4$

a) $f(x) = 2x + 1$
b) $g(x) = 0{,}5x + 1$
c) $h(x) = \, -2x - 3$
d) $i(x) = \, -0.5x - 3$



Exercice 2. : On donne ci-dessous, la représentation graphique de 3 fonctions f, g, et h.



a) Donner l'expression des fonctions f, g, et h.

$f(x) = -0{,}2x + 2$
$g(x) = -x - 2$
$h(x) = 3x - 4$

b) Tracer les droites sur calculatrice.

c) Construire les tableaux de signe de ces 3 fonctions.

$f(x) = 0$ $-0{,}2x + 2 = 0$ $-0{,}2x = -2$ $x = \frac{-2}{-0{,}2}$ $x = 10$	$g(x) = 0$ $-x - 2 = 0$ $-x = 2$ $x = -2$	$h(x) = 0$ $3x - 4 = 0$ $3x = 4$ $x = \frac{4}{3}$ $x \approx 1{,}3$

x	$-\infty$		10		$+\infty$
Signe de $f(x) = -0{,}2x + 2$		+	0	-	

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g(x) = -x - 2$		+	0	-	

x	$-\infty$ $\qquad$ $\frac{4}{3}$ $\qquad$ $+\infty$
$h(x) = 3x - 4$	- $\qquad$ 0 $\qquad$ +

d) Donner les coordonnées des points d'intersection A , B et C .

A intersection de d_f et d_g :	B intersection de d_g et d_h :	C intersection de d_f et d_h :
<u>Calcul abscisse x de A :</u>	<u>Calcul abscisse x de B :</u>	<u>Calcul abscisse x de C :</u>
$f(x) = g(x)$	$g(x) = h(x)$	$f(x) = h(x)$
$-0{,}2x + 2 = -x - 2$	$-x - 2 = 3x - 4$	$-0{,}2x + 2 = 3x - 4$
$0{,}8\,x = -4$	$2 = 4x$	$6 = 3{,}2x$
$x = \frac{-4}{0{,}8}$	$x = \frac{2}{4}$	$x = \frac{6}{3{,}2}$
$x = -5$	$x = 0{,}5$	$x = 1{,}875$
<u>Calcul ordonnée y de A :</u>	<u>Calcul ordonnée y de B :</u>	<u>Calcul ordonnée y de C :</u>
$y = f(-5) = g(-5)$	$y = g(0{,}5) = h(0{,}5)$	$y = f(1{,}875) = h(1{,}875)$
$y = -(-5) - 2$	$y = -(0{,}5) - 2$	$y = 3 \times 1{,}875 - 4$
$y = 3$	$y = -2{,}5$	$y = 1{,}625$
<u>Coordonnées du point :</u>	<u>Coordonnées du point :</u>	<u>Coordonnées du point :</u>
$A(-5\,;3)$	$B(0{,}5\,;-2{,}5)$	$C(1{,}875\,;1{,}625)$

<u>Exercice 3.</u>: Résolutions d'équations et calculs

a) Chercher la valeur de x qui permet d'avoir l'égalité : $3x - 5 = 2\,x - 15$

$$3x - 5 = 2\,x - 15$$
$$x = -10$$

b) On a la relation suivante : $5E + U = 10$. Exprimer E en fonction de U

$$5E + U = 10$$
$$5E = 10 - U$$
$$E = \frac{(10 - U)}{5}$$
$$E = \frac{10}{5} - \frac{U}{5}$$
$$E = 2 - \frac{1}{5}U$$
$$E = 2 - 0{,}2\,U$$

c) On a la relation suivante : $\frac{U}{2} - A = 0$. Exprimer U en fonction de A

$$\frac{U}{2} - A = 0$$
$$\frac{U}{2} = A$$
$$U = 2A$$

d) On a la relation suivante : $\frac{a}{b} = \frac{R}{m}$. Exprimer a en fonction de R, m et b

$$\frac{a}{b} = \frac{R}{m}$$
$$a = \frac{R}{m} b = \frac{R\, b}{m}$$

e) Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ sous forme de fraction. Donner une valeur approchée au dixième.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

f) Exprimer $\frac{U}{2} + \frac{U}{3}$ en fonction de U

$$\frac{U}{2} + \frac{U}{3} = \frac{3U}{6} + \frac{2U}{6} = \frac{5U}{6} = \frac{5}{6} U$$

g) On a la relation : $(R + r)I = U$. Exprimer r en fonction des autres grandeurs.

$$(R + r)I = U$$
$$(R + r) = \frac{U}{I}$$
$$R + r = \frac{U}{I}$$
$$r = \frac{U}{I} - R$$

h) On a la relation : $P = \frac{1}{2} R\, I^2$. Exprimer R en fonction des autres grandeurs.

$$P = \frac{1}{2} R\, I^2$$
$$2P = R\, I^2$$
$$\frac{2P}{I^2} = R$$

i) On a la relation $S = \frac{a}{a+b} \times E$. Exprimer b en fonction des autres grandeurs.

$$S = \frac{a}{a + b} \times E$$
$$S(a + b) = a \times E$$
$$Sa + Sb = aE$$
$$Sb = aE - Sa$$
$$b = \frac{aE - Sa}{S}$$

Exercice 4. : La courbe ci-dessous, donne l'évolution de l'intensité I (en A) d'un moteur à courant continu lorsque le couple C (en N.m) qui lui est appliqué varie.

$f(x) = ax + b$

On lit sur la courbe : $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,3}{2} = 0,15$

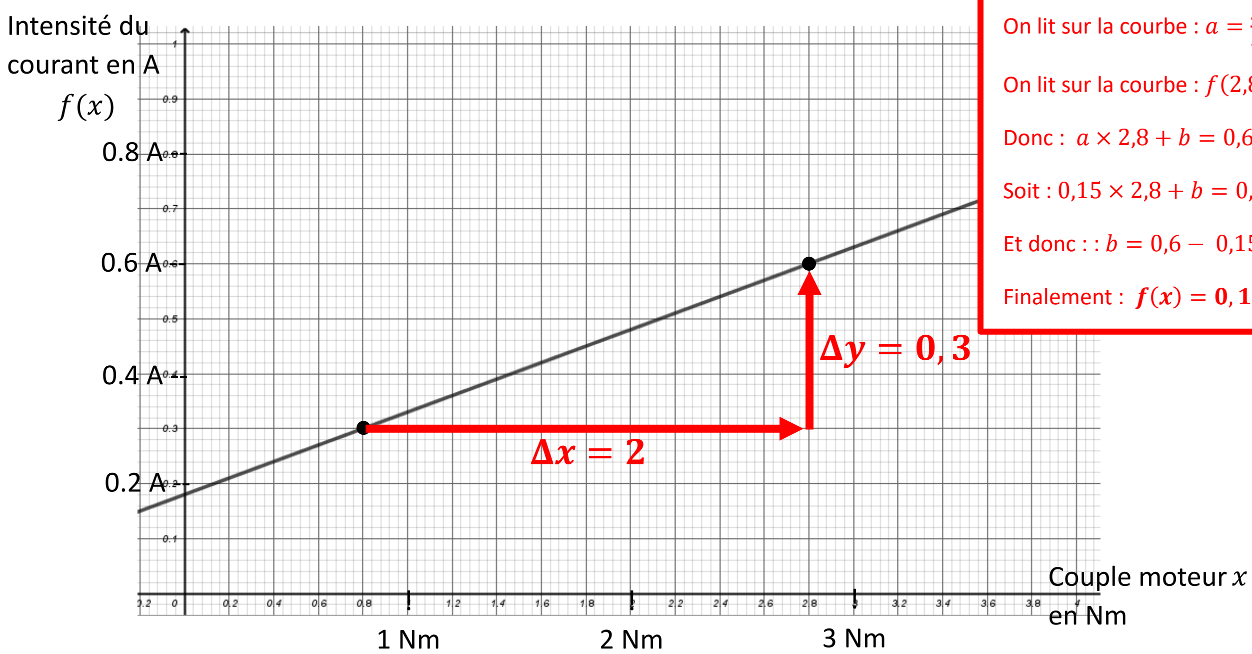
On lit sur la courbe : $f(2,8) = 0,6$

Donc : $a \times 2,8 + b = 0,6$

Soit : $0,15 \times 2,8 + b = 0,6$

Et donc : : $b = 0,6 - 0,15 \times 2,8 = 0,18$

Finalement : $\boldsymbol{f(x) = 0,15\, x + 0,18}$

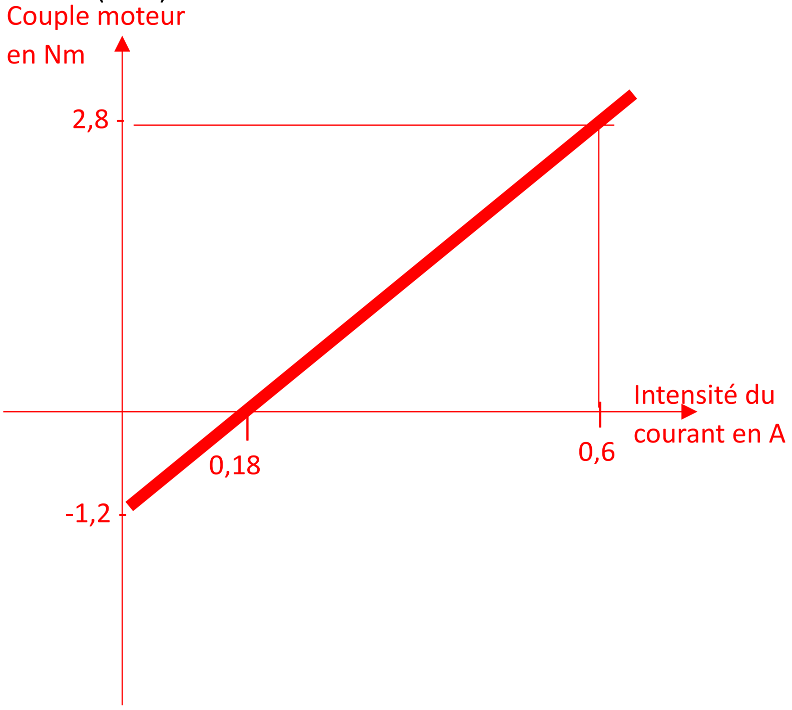


a) La droite ci-dessus est la courbe représentative d'une fonction f . Donner l'expression de $f(x)$.
b) Déterminer la formule qui donne l'intensité I en fonction du couple C.
c) Utiliser cette formule pour déterminer l'intensité I pour $C = 2{,}1\ N.m$
d) Déterminer la formule qui donne le couple C en fonction de l'intensité I
e) Tracer la courbe qui donne l'évolution du couple C (en N.m) qui est appliqué en sortie de moteur en fonction de l'intensité I (en A)

$\boxed{\boldsymbol{I = 0,15\ C + 0,18}}$

$\boxed{\boldsymbol{I = 0,15\ \times 2,1 + 0,18 = 0,495\ A}}$

$$\boldsymbol{I = 0,15\ C + 0,18}$$
$$\boldsymbol{I - 0,18 = 0,15\ C}$$
$$\boldsymbol{\frac{I - 0,18}{0,15} = C}$$
$$\boldsymbol{C = \frac{I}{0,15} - \frac{0,18}{0,15}}$$
$$\boldsymbol{C = \frac{1}{0,15} I - \frac{0,18}{0,15}}$$
$$\boldsymbol{C \approx 6,7\ I - 1,2}$$



Exercice 5. : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 5t - 2$

a) Construire le tableau de variation de f
b) Construire le tableau de signe de f

Exercice 6. : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -220t - 110$

a) Construire le tableau de variation de f
b) Construire le tableau de signe de f

Exercice 7. : Résolutions d'équations et calculs

a) Chercher la valeur de x qui permet d'avoir l'égalité : $\frac{x}{2} + 40 = 2\,x - 10$

$$\frac{x}{2} + 40 = 2\,x - 10$$
$$\frac{x}{2} - 2x = -50$$
$$\frac{x}{2} - \frac{2x}{1} = -50$$
$$\frac{x}{2} - \frac{4x}{2} = -50$$
$$\frac{-3x}{2} = -50$$
$$-3x = -100$$
$$x = \frac{100}{3} \approx 33{,}3$$

b) On a la relation suivante : $U = R\,I + E$. Exprimer I en fonction des autres grandeurs.

$$U = R\,I + E$$
$$U - E = R\,I$$
$$\frac{U - E}{R} = I$$
$$\frac{U}{R} - \frac{E}{R} = I$$

c) On a la relation suivante : $\frac{U}{R} - I = 0$. Exprimer U en fonction des autres grandeurs.

$$\frac{U}{R} - I = 0$$
$$\frac{U}{R} = I$$
$$U = I\,R$$

d) On a la relation suivante : $\frac{a}{b} = \frac{1}{R}$. Exprimer R en fonction des autres grandeurs.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{R}$$
$$\frac{b}{a} = R$$

e) Calculer $\frac{1}{4} - \frac{3}{7}$ sous forme de fraction. Donner une valeur approchée au dixième.

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{7} = \frac{7}{28} - \frac{12}{28}$$
$$= \frac{-5}{28}$$

f) Exprimer $\frac{R}{4} + \frac{3R}{7}$ en fonction de R

$$\frac{R}{4} + \frac{3R}{7} = \frac{7R}{28} + \frac{12R}{28}$$
$$= \frac{19\,R}{28} = \frac{19}{28}R$$

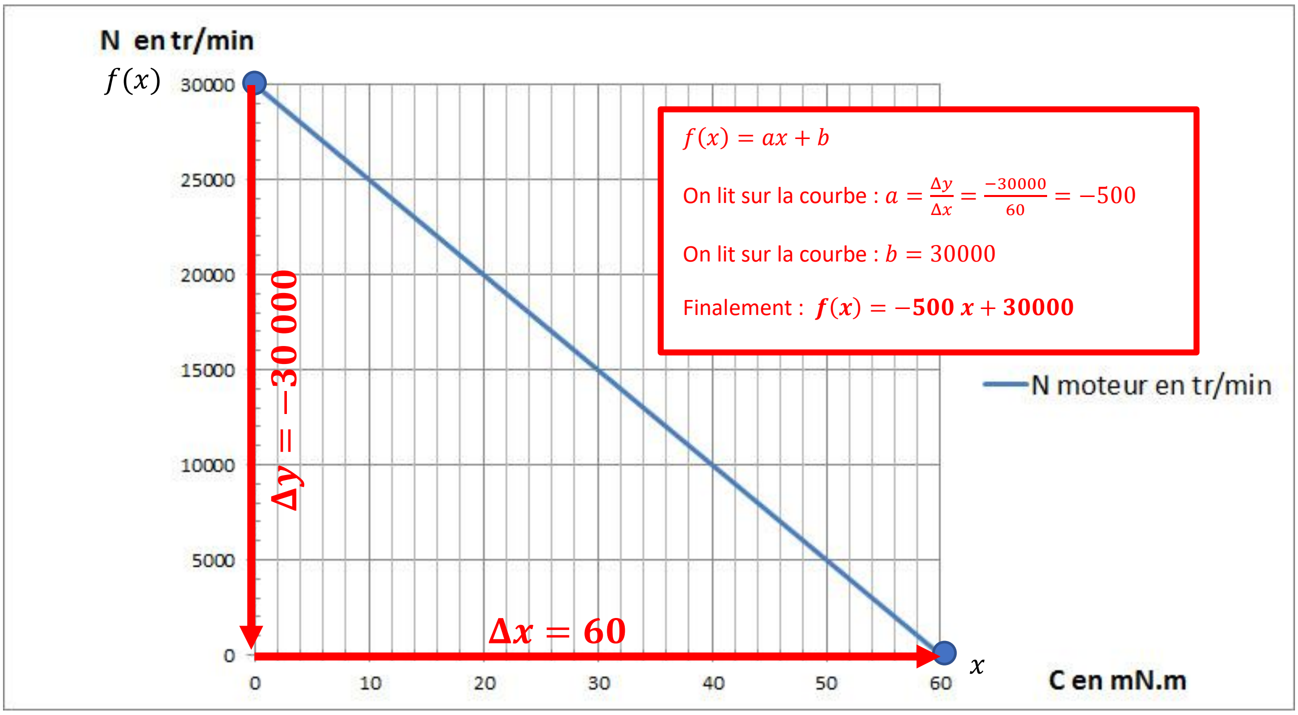
g) On a la relation : $P = \frac{1}{2}\,R\,I^2$. Exprimer I en fonction des autres grandeurs.

$$P = \frac{1}{2}\,R\,I^2$$
$$\frac{2P}{R} = I^2$$
$$\sqrt{\frac{2P}{R}} = I$$

h) On a la relation $S = \frac{R_2}{R_1+R_2} \times E$. Exprimer R_2 en fonction des autres grandeurs.

$$S = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times E$$
$$S(R_1 + R_2) = R_2 \times E$$
$$SR_1 + SR_2 = R_2E$$
$$SR_2 - R_2E = -S\,R_1$$
$$R_2 = \frac{-SR_1}{S - E}$$

Exercice 8. La courbe ci-dessous, donne l'évolution de l'intensité I (en A) d'un moteur à courant continu lorsque le couple C (en N.m) qui lui est appliqué varie.



a) La droite ci-dessus est la courbe représentative d'une fonction f . Donner l'expression de $f(x)$.

b) Déterminer la formule qui donne la vitesse de rotation N en fonction du couple C. $\boxed{N = -500\,C + 30000}$

c) Utiliser cette formule pour déterminer la vitesse N pour $C = 30\ mN.m$

d) Déterminer la formule qui donne le couple C en fonction de l'intensité N $\boxed{N = -500 \times 30 + 30000 = 15000}$

e) Tracer la courbe qui donne l'évolution du couple C (en mN.m) qui est appliqué en sortie de moteur en fonction de la vitesse N (en tr/min)

$N = -500\,C + 30000$

$N - 30000 = -500\,C$

$\frac{N - 30000}{-500} = C$

$C = \frac{N}{-500} - \frac{30000}{-500}$

$C = -\frac{1}{500}N + \frac{30000}{500}$

$\boldsymbol{C = -0{,}002\,N + 60}$