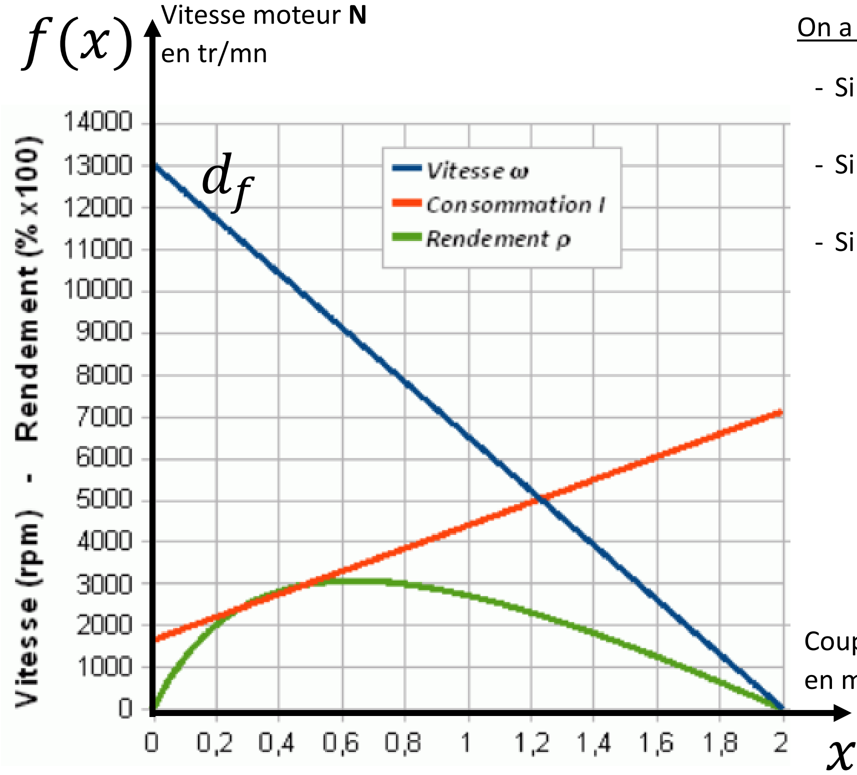
Chapitre 3 - Fonctions affines – Equations 1^{er} degré

1- EXEMPLE D'INTRODUCTION :

La droite d_f ci-dessous, donne l'évolution de la vitesse N (*en trs/mn*) d'un moteur à courant continu lorsque le couple C (*en mN.m*) qui lui est appliqué varie.



On a comme mesures précises :

- Si $C = 0{,}6\ mNm$ alors $N = 9100\ trs/mn$
- Si $C = 1{,}4\ mNm$ alors $N = 3900\ trs/mn$
- Si $= 0\ nNm$ alors $N = 13000\ trs/mn$

Question : La droite d_f ci-dessus est la courbe représentative d'une fonction f . Donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x .

Vérification : Calcul de la vitesse en trs/mn, si le couple appliqué est

- de $1\ mNm$:
- de $0{,}4\ mNm$:
- de $1{,}6\ mNm$:

2- POINT COURS FONCTIONS AFFINES :

Définition :

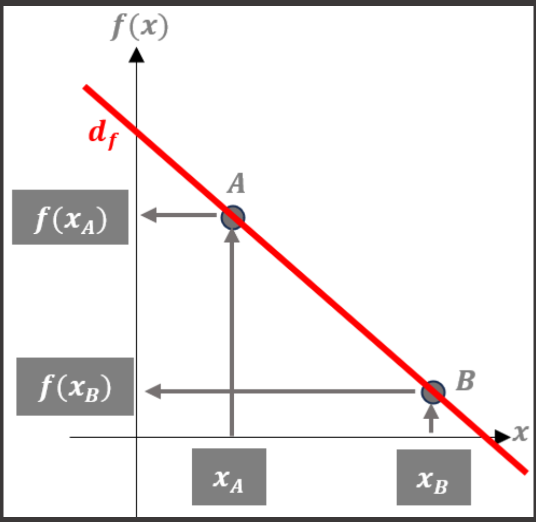
⇨ L'expression d'une fonction affine est du type $f(x) = ax + b$, a et b étant des constantes réelles. a est appelé

, b est appelé

Trouver a et b :

⇨ Soit une fonction affine f. Si on connait les coordonnées de 2 points $A(x_A\,, f(x_A))$ et $B(x_B\,, f(x_B))$ de sa droite représentative, on peut calculer les valeurs des nombres a et b de la relation :

$$f(x) = a\,x + b$$

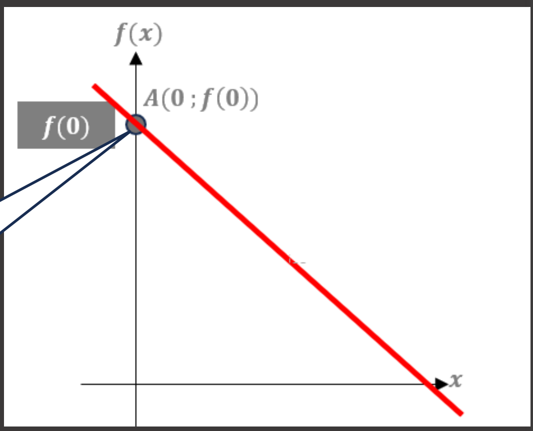


- Pour trouver la valeur du nombre a, on écrit :

$$a = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- Pour trouver la valeur du nombre b, on écrit $b = f(x_A) - a\,x_A$

- Si $x_A = 0$, cette dernière relation donne : $b = f(0) - a \times 0 = f(0)$



Sens de variation:

Le sens de variation d'une fonction affine $f(x) = a\,x + b$ dépend du signe du coefficient directeur a :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de $f(x) = ax + b$	est POSITIF	

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de $f(x) = ax + b$	est NEGATIF	

Tableau de signe :

Pour tracer le tableau de signe d'une fonction affine $f(x) = a\,x + b$ on commence par résoudre l'équation $f(x) = 0$. Le tableau de signe de f est alors l'un des 2 ci-dessous :

x	$-\infty$	.....	$+\infty$
Signe de $f(x) = ax + b$	-	0	+

est POSITIF

x	$-\infty$	.....	$+\infty$
Signe de $f(x) = ax + b$	+	0	-

est NEGATIF

Equations 1er d° :

$$3\,x + 1 = x - 4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x = -2{,}5$$

Résoudre l'équation, cela consiste à réécrire l'égalité en la transformant à chaque ligne …. pour à la fin, retrouver l'inconnue x toute seule, uniquement dans un des 2 membres.

Et comment on transforme l'équation ? :

Les lignes que l'on écrit doivent absolument conserver l'égalité entre les 2 membres. Pour conserver cette égalité, on peut :

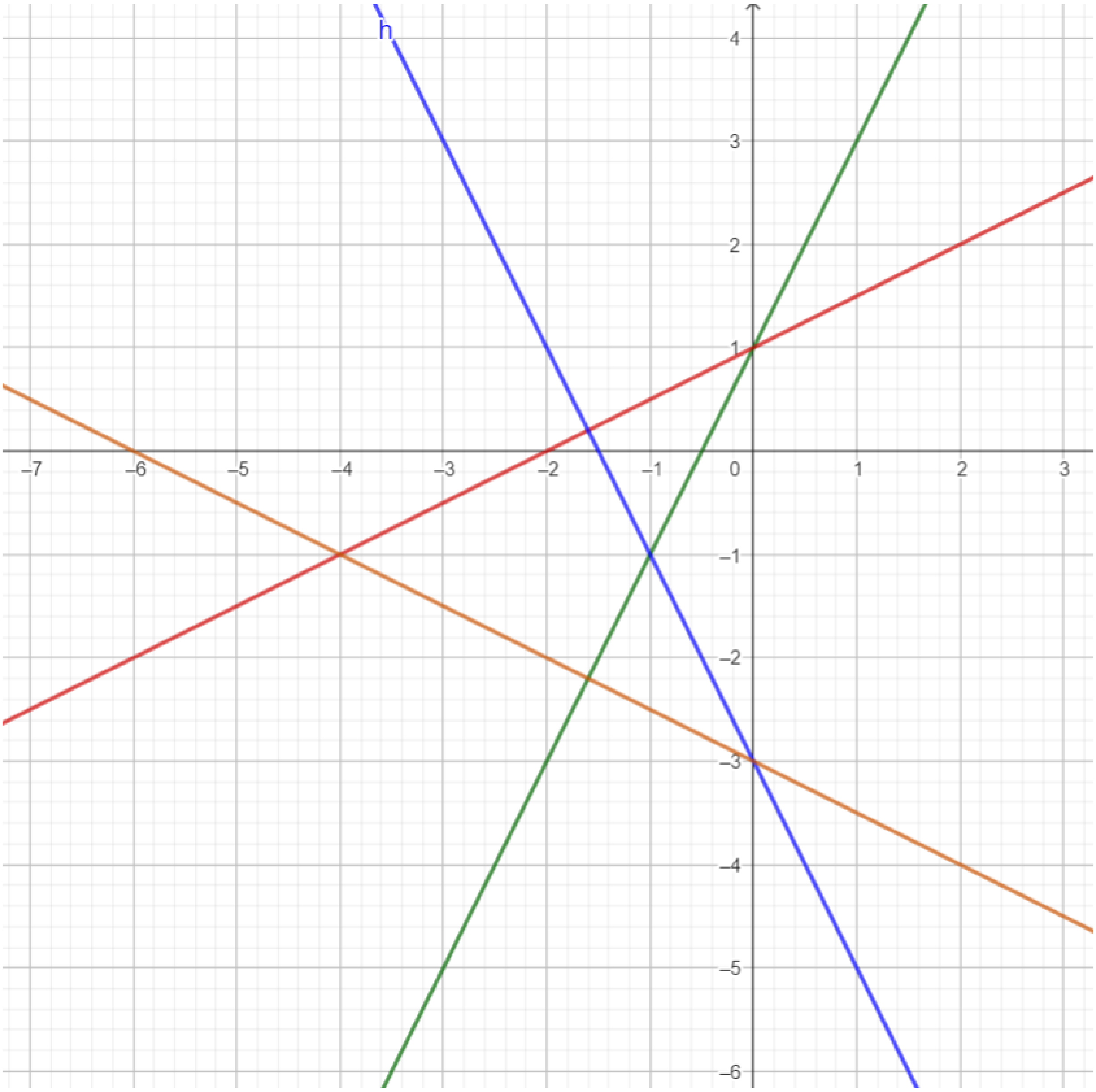
- AJOUTER ou SOUSTRAIRE un même nombre à tout le membre de gauche, à condition de faire également la même opération à tout le membre de droite.

- MULTIPLIER ou DIVISER par un même nombre, tout le membre de gauche, à condition de faire également la même opération sur tout le membre de droite.

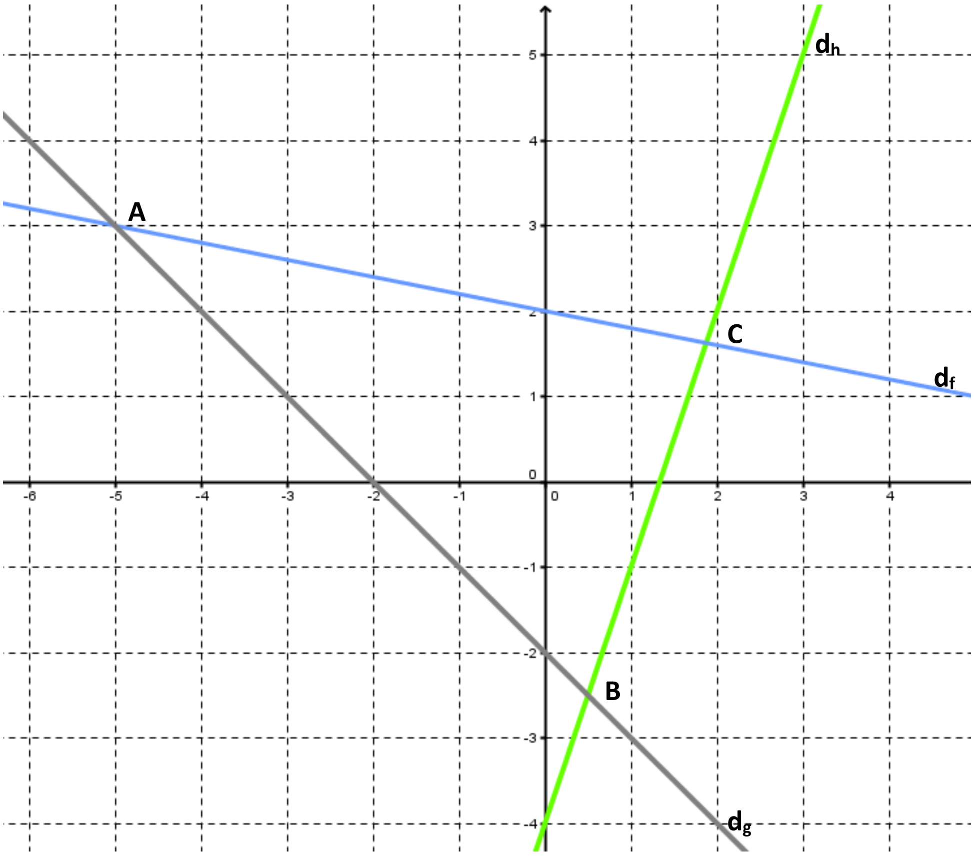
3- EXERCICES :

Exercice 1. : Pour chacune des fonctions suivantes, identifier le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine, puis tracer la droite correspondante avec comme fenêtre graphique $x \in [-7\,;3]$ et $-6 \leq y \leq 4$

a) $f(x) = 2x + 1$
b) $g(x) = 0{,}5x + 1$
c) $h(x) = -2x - 3$
d) $i(x) = -0.5x - 3$



Exercice 2. : On donne ci-dessous, la représentation graphique de 3 fonctions f, g, et h.



a) Donner l'expression des fonctions f, g, et h.

$f(x) = -0{,}2x + 2$
$g(x) = -x - 2$
$h(x) = 3x - 4$

b) Tracer les droites sur calculatrice.

c) Construire les tableaux de signe de ces 3 fonctions.

$f(x) = 0$ $-0{,}2x + 2 = 0$ $-0{,}2x = -2$ $x = \frac{-2}{-0{,}2}$ $x = 10$	$g(x) = 0$ $-x - 2 = 0$ $-x = 2$ $x = -2$	$h(x) = 0$ $3x - 4 = 0$ $3x = 4$ $x = \frac{4}{3}$ $x \approx 1{,}3$

d) Donner les coordonnées des points d'intersection A , B et C .

A intersection de d_f et d_g : <u>Calcul abscisse x de A :</u> $f(x) = g(x)$ $-0{,}2x + 2 = -x - 2$ $0{,}8\,x = -4$ $x = \frac{-4}{0{,}8}$ $x = -5$	B intersection de d_g et d_h : <u>Calcul abscisse x de B :</u> $g(x) = h(x)$ $-x - 2 = 3x - 4$ $2 = 4x$ $x = \frac{2}{4}$ $x = 0{,}5$	C intersection de d_f et d_h : <u>Calcul abscisse x de C :</u> $f(x) = h(x)$ $-0{,}2x + 2 = 3x - 4$ $6 = 3{,}2x$ $x = \frac{6}{3{,}2}$ $x = 1{,}875$

Calcul ordonnée y de A :	Calcul ordonnée y de B :	Calcul ordonnée y de C :
$y = f(-5) = g(-5)$	$y = g(0{,}5) = h(0{,}5)$	$y = f(1{,}875) = h(1{,}875)$
$y = -(-5) - 2$	$y = -(0{,}5) - 2$	$y = 3 \times 1{,}875 - 4$
$y = 3$	$y = -2{,}5$	$y = 1{,}625$
Coordonnées du point :	Coordonnées du point :	Coordonnées du point :
$A(-5\,;3)$	$B(0{,}5\,;-2{,}5)$	$C(1{,}875\,;1{,}625)$

Exercice 3.: Résolutions d'équations et calculs

a) Chercher la valeur de x qui permet d'avoir l'égalité : $3x - 5 = 2\,x - 15$

$3x - 5 = 2\,x - 15$

$x = -10$

b) On a la relation suivante : $5E + U = 10$. Exprimer E en fonction de U

$5E + U = 10$

$5E = 10 - U$

$E = \frac{(10 - U)}{5}$

$E = \frac{10}{5} - \frac{U}{5}$

$E = 2 - \frac{1}{5}U$

$E = 2 - 0{,}2\,U$

c) On a la relation suivante : $\frac{U}{2} - A = 0$. Exprimer U en fonction de A

$\frac{U}{2} - A = 0$

$\frac{U}{2} = A$

$U = 2A$

d) On a la relation suivante : $\frac{a}{b} = \frac{R}{m}$. Exprimer a en fonction de R, m et b

$\frac{a}{b} = \frac{R}{m}$

$a = \frac{R}{m}b = \frac{R\,b}{m}$

e) Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ sous forme de fraction. Donner une valeur approchée au dixième.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

f) Exprimer $\frac{U}{2} + \frac{U}{3}$ en fonction de U

$\frac{U}{2} + \frac{U}{3} = \frac{3U}{6} + \frac{2U}{6} = \frac{5U}{6} = \frac{5}{6}U$

g) On a la relation : $(R + r)I = U$. Exprimer r en fonction des autres grandeurs.

$(R + r)I = U$

$(R + r) = \frac{U}{I}$

$R + r = \frac{U}{I}$

$r = \frac{U}{I} - R$

h) On a la relation : $P = \frac{1}{2}\, R\, I^2$. Exprimer R en fonction des autres grandeurs.

$$P = \frac{1}{2} R I^2$$
$$2P = R I^2$$
$$\frac{2P}{I^2} = R$$

i) On a la relation $S = \frac{a}{a+b} \times E$. Exprimer b en fonction des autres grandeurs.

$$S = \frac{a}{a+b} \times E$$
$$S(a+b) = a \times E$$
$$Sa + Sb = aE$$
$$Sb = aE - Sa$$
$$b = \frac{aE - Sa}{S}$$

Exercice 4. : La courbe ci-dessous, donne l'évolution de l'intensité I (en A) d'un moteur à courant continu lorsque le couple C (en N.m) qui lui est appliqué varie.

$f(x) = ax + b$

On lit sur la courbe : $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0{,}3}{2} = 0{,}15$

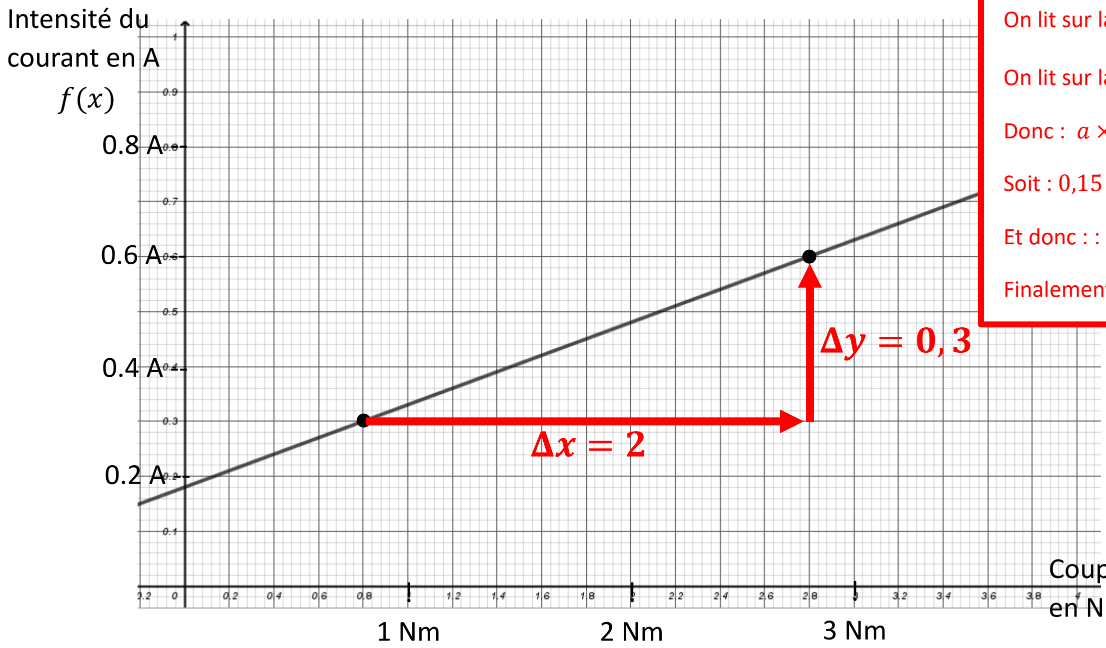
On lit sur la courbe : $f(2{,}8) = 0{,}6$

Donc : $a \times 2{,}8 + b = 0{,}6$

Soit : $0{,}15 \times 2{,}8 + b = 0{,}6$

Et donc : : $b = 0{,}6 - 0{,}15 \times 2{,}8 = 0{,}18$

Finalement : $\boldsymbol{f(x) = 0{,}15\, x + 0{,}18}$



a) La droite ci-dessus est la courbe représentative d'une fonction f . Donner l'expression de $f(x)$.

b) Déterminer la formule qui donne l'intensité I en fonction du couple C.

$\boldsymbol{I = 0{,}15\, C + 0{,}18}$

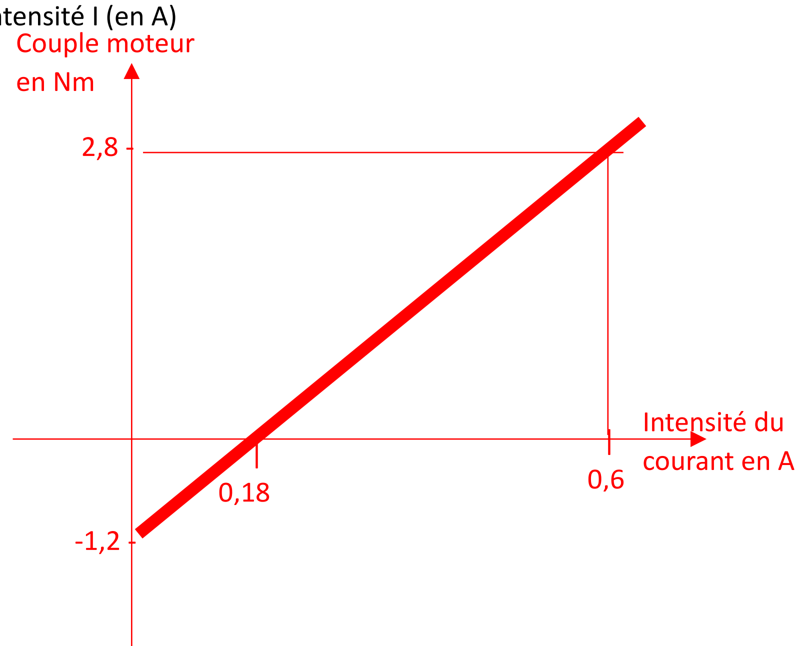
c) Utiliser cette formule pour déterminer l'intensité I pour $C = 2{,}1\ N.m$

$\boldsymbol{I = 0{,}15 \times 2{,}1 + 0{,}18}$ **= 0,495 A**

d) Déterminer la formule qui donne le couple C en fonction de l'intensité I

e) Tracer la courbe qui donne l'évolution du couple C (en N.m) qui est appliqué en sortie de moteur en fonction de l'intensité I (en A)

$$\boldsymbol{I = 0{,}15\, C + 0{,}18}$$
$$\boldsymbol{I - 0{,}18 = 0{,}15\, C}$$
$$\boldsymbol{\frac{I - 0{,}18}{0{,}15} = C}$$
$$\boldsymbol{C = \frac{I}{0{,}15} - \frac{0{,}18}{0{,}15}}$$
$$\boldsymbol{C = \frac{1}{0{,}15} I - \frac{0{,}18}{0{,}15}}$$
$$\boldsymbol{C \approx 6{,}7\, I - 1{,}2}$$



Exercice 5. : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 5t - 2$

a) Construire le tableau de variation de f
b) Construire le tableau de signe de f

Exercice 6. : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = -220t - 110$

a) Construire le tableau de variation de f
b) Construire le tableau de signe de f

Exercice 7. : Résolutions d'équations et calculs

a) Chercher la valeur de x qui permet d'avoir l'égalité : $\frac{x}{2} + 40 = 2\,x - 10$

$$\frac{x}{2} + 40 = 2\,x - 10$$
$$\frac{x}{2} - 2x = -50$$
$$\frac{x}{2} - \frac{2x}{1} = -50$$
$$\frac{x}{2} - \frac{4x}{2} = -50$$
$$\frac{-3x}{2} = -50$$
$$-3x = -100$$
$$x = \frac{100}{3} \approx 33{,}3$$

b) On a la relation suivante : $U = R\,I + E$. Exprimer I en fonction des autres grandeurs.

$$U = R\,I + E$$
$$U - E = R\,I$$
$$\frac{U-E}{R} = I$$
$$\frac{U}{R} - \frac{E}{R} = I$$

c) On a la relation suivante : $\frac{U}{R} - I = 0$. Exprimer U en fonction des autres grandeurs.

$$\frac{U}{R} - I = 0$$
$$\frac{U}{R} = I$$
$$U = I\,R$$

d) On a la relation suivante : $\frac{a}{b} = \frac{1}{R}$. Exprimer R en fonction des autres grandeurs.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{R}$$
$$\frac{b}{a} = R$$

e) Calculer $\frac{1}{4} - \frac{3}{7}$ sous forme de fraction. Donner une valeur approchée au dixième.

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{7} = \frac{7}{28} - \frac{12}{28}$$
$$= \frac{-5}{28}$$

f) Exprimer $\frac{R}{4} + \frac{3R}{7}$ en fonction de R

$$\frac{R}{4} + \frac{3R}{7} = \frac{7R}{28} + \frac{12R}{28}$$
$$= \frac{19\,R}{28} = \frac{19}{28}R$$

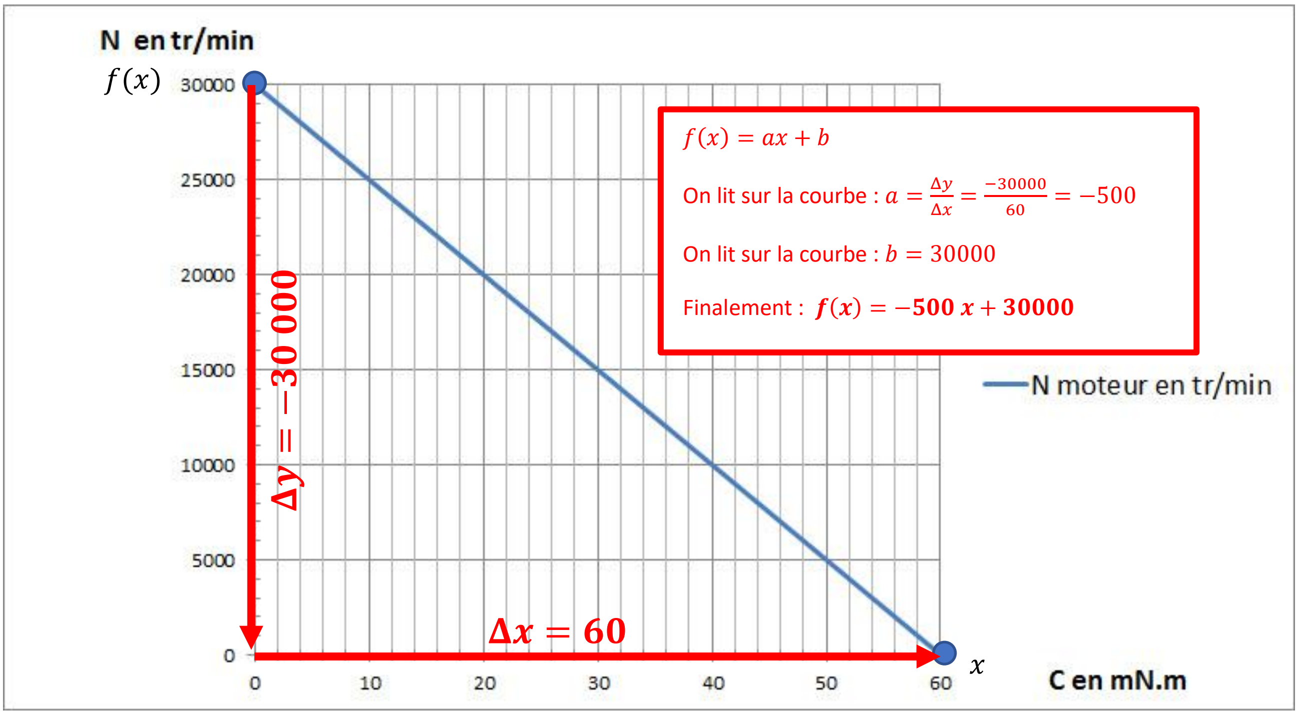
g) On a la relation : $P = \frac{1}{2}\,R\,I^2$. Exprimer I en fonction des autres grandeurs.

$$P = \frac{1}{2}\,R\,I^2$$
$$\frac{2P}{R} = I^2$$
$$\sqrt{\frac{2P}{R}} = I$$

h) On a la relation $S = \frac{R_2}{R_1+R_2} \times E$. Exprimer R_2 en fonction des autres grandeurs.

$$S = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times E$$
$$S(R_1 + R_2) = R_2 \times E$$
$$SR_1 + SR_2 = R_2E$$
$$SR_2 - R_2E = -S\,R_1$$
$$R_2 = \frac{-SR_1}{S-E}$$

Exercice 8. La courbe ci-dessous, donne l'évolution de l'intensité I (en A) d'un moteur à courant continu lorsque le couple C (en N.m) qui lui est appliqué varie.



a) La droite ci-dessus est la courbe représentative d'une fonction f . Donner l'expression de $f(x)$.

b) Déterminer la formule qui donne la vitesse de rotation N en fonction du couple C. $\boxed{\boldsymbol{N = -500\,C + 30000}}$

c) Utiliser cette formule pour déterminer la vitesse N pour $C = 30\,mN.m$

$\boxed{\boldsymbol{N = -500 \times 30 + 30000 = 15000}}$

d) Déterminer la formule qui donne le couple C en fonction de l'intensité N

e) Tracer la courbe qui donne l'évolution du couple C (en mN.m) qui est appliqué en sortie de moteur en fonction de la vitesse N (en tr/min)

$$N = -500\,C + 30000$$

$$N - 30000 = -500\,C$$

$$\frac{N - 30000}{-500} = C$$

$$C = \frac{N}{-500} - \frac{30000}{-500}$$

$$C = -\frac{1}{500}N + \frac{30000}{500}$$

$$\boldsymbol{C = -0,002\,N + 60}$$