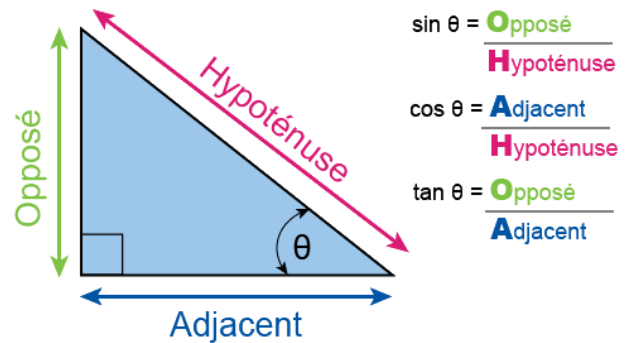


1- COSINUS ET DU SINUS D'UN ANGLE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE :

Historiquement, les cosinus, sinus et tangente d'un angle ont été définis de la manière suivante :

Comme la longueur de l'hypoténuse est toujours supérieure à celles des côtés opposés ou adjacents, on peut en déduire que $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont toujours inférieurs à 1.



D'autre part, si on calcule : $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2$

On obtient : $\left(\frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}\right)^2 + \left(\frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}\right)^2$

Ce qui donne : $\frac{\text{Adjacent}^2 + \text{Opposé}^2}{\text{Hypoténuse}^2}$

D'après le théorème de Pythagore : $\text{Adjacent}^2 + \text{Opposé}^2 = \text{Hypoténuse}^2$

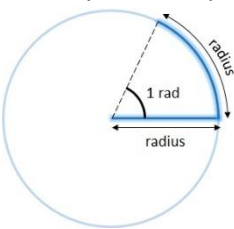
On a donc finalement : $(\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2 = \frac{\text{Hypoténuse}^2}{\text{Hypoténuse}^2} = 1$

Point Cours :

- $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont toujours inférieurs à 1
- $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$

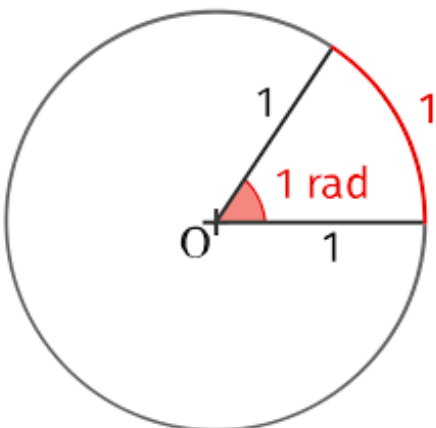
2- UNITES DES ANGLES :

Depuis l'antiquité, l'unité utilisée pour mesurer des angles était le **degré**. Ce n'est qu'à la fin du 19^{ème} siècle que l'on utilise le **radian**. Cette nouvelle unité est impérative lorsque l'on dérive ou intègre les fonctions cosinus et sinus. On l'utilise ainsi en sciences physiques.



Un angle de 1 radian est obtenu en enroulant sur un cercle une longueur égale à son rayon.

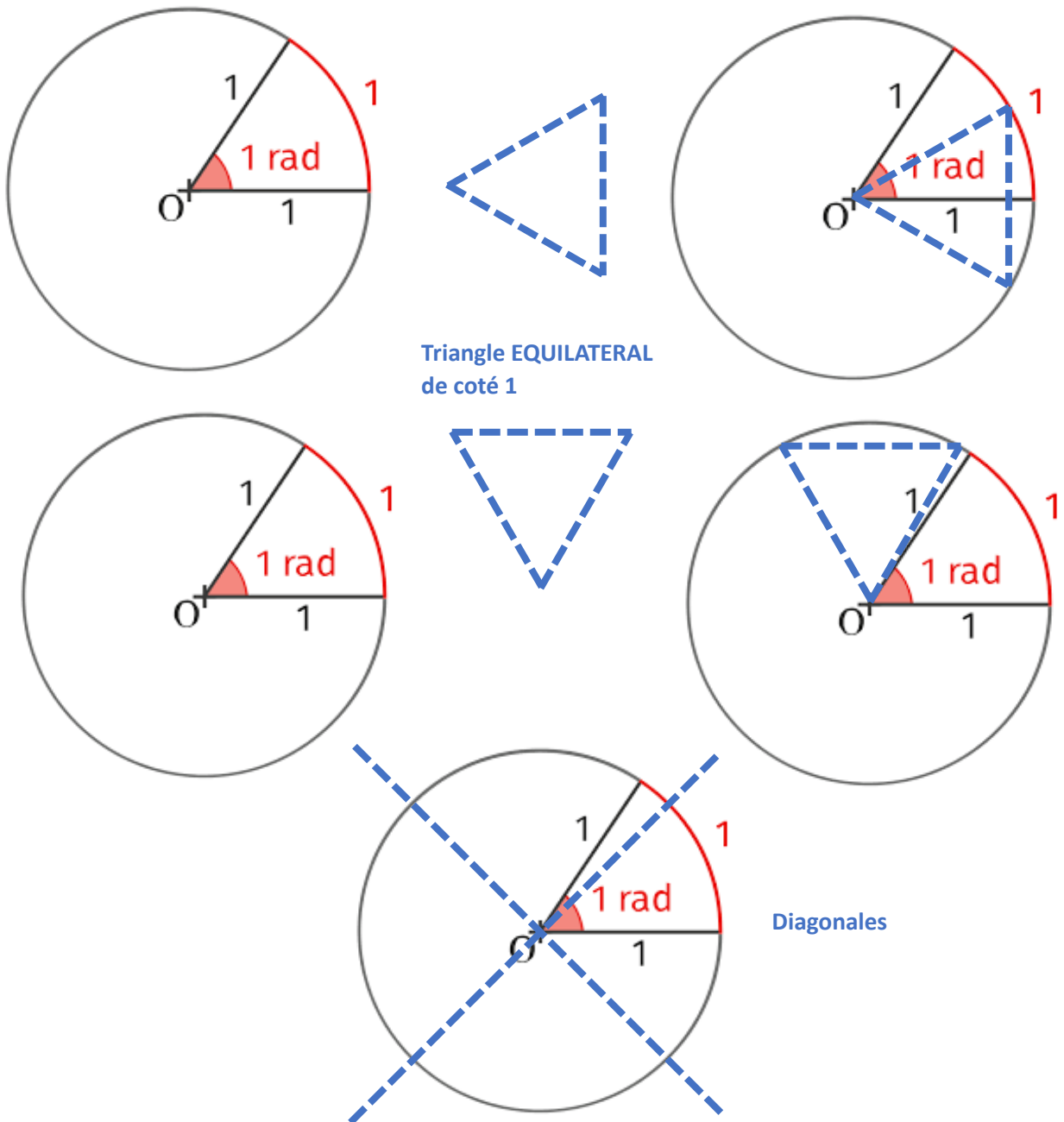
Si on raisonne sur un cercle dont le rayon est égal à 1, on obtient 1 radian en enroulant une longueur de 1 sur le cercle.



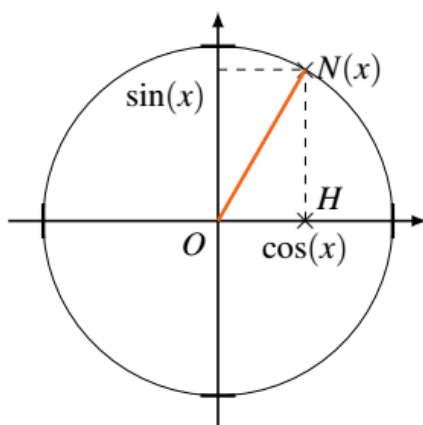
- Point Cours :
- Un cercle de rayon 1, centré sur l'origine d'un repère est appelé **CERCLE TRIGONOMETRIQUE**
 - Le périmètre d'un cercle trigonométrique est égal à 2π

3- ANGLES REMARQUABLES :

Les angles en radians ne sont pas nécessairement compris entre 0° et 90° . Un angle θ en radians pourra prendre n'importe quelle valeur réelle : $\theta \in]-\infty ; +\infty[$. Parmi toutes ces valeurs possibles, certaines sont dites remarquables. Elles correspondent aux équivalents en degrés des angles 0° , 30° , 60° et 90° .



4- COSINUS ET SINUS D'UN ANGLE SUR UN CERCLE TRIGONOMETRIQUE :

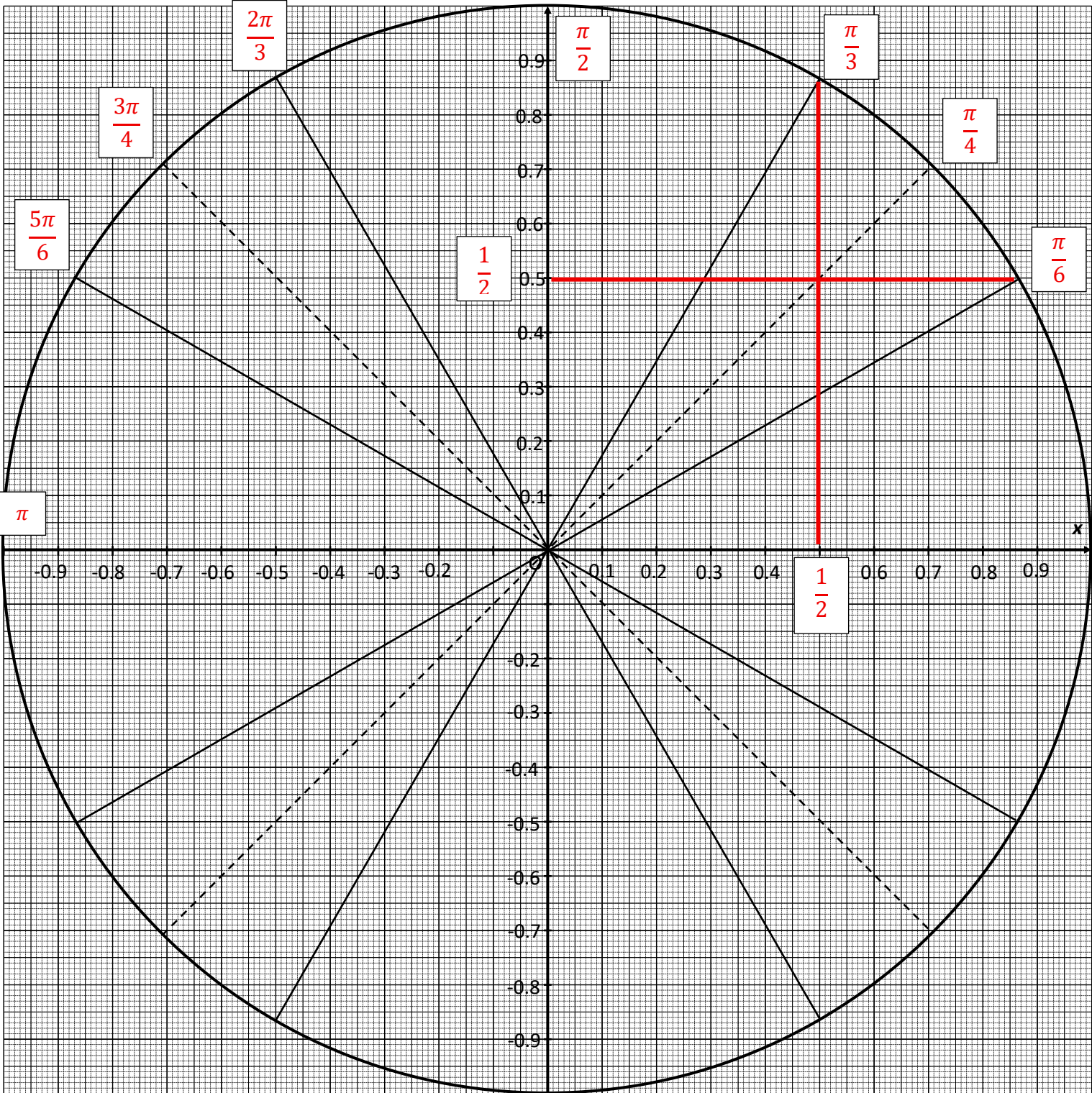


Point Cours :

Soit un point N du cercle trigonométrique repéré par un angle noté x et exprimé en radians :

- $\cos(x)$ prend la valeur de l'abscisse de ce point,
- $\sin(x)$ prend la valeur de l'ordonnée de ce point.

5- COSINUS ET SINUS DES ANGLES REMARQUABLES :



Angle θ en $^\circ$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Angle θ en rad	0 rd	$\frac{\pi}{6} \text{ rd}$	$\frac{\pi}{4} \text{ rd}$	$\frac{\pi}{3} \text{ rd}$	$\frac{\pi}{2} \text{ rd}$	$\frac{2\pi}{3} \text{ rd}$	$\frac{3\pi}{4} \text{ rd}$	$\frac{5\pi}{6} \text{ rd}$	$\pi \text{ rd}$
$\cos(\theta)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(\theta)$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Point Cours : On doit toujours avoir $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. Ainsi :

- si $\cos(x) = 1$ alors $\sin(x) = 0$ car $1^2 + 0^2 = 1$
- si $\cos(x) = \frac{1}{2}$ alors $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$
- si $\cos(x) = \sin(x)$ alors $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ car $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

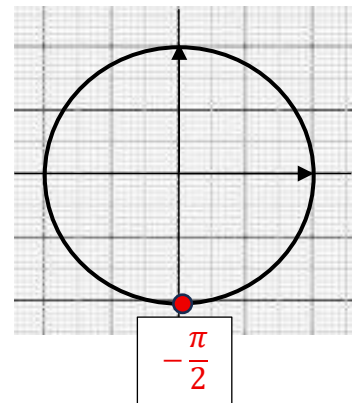
6- MESURE PRINCIPALE D'UN ANGLE :

Point Cours : La mesure principale d'un angle θ est celle qui repère le même point sur le cercle trigonométrique, mais avec une valeur comprise entre $-\pi$ et π .

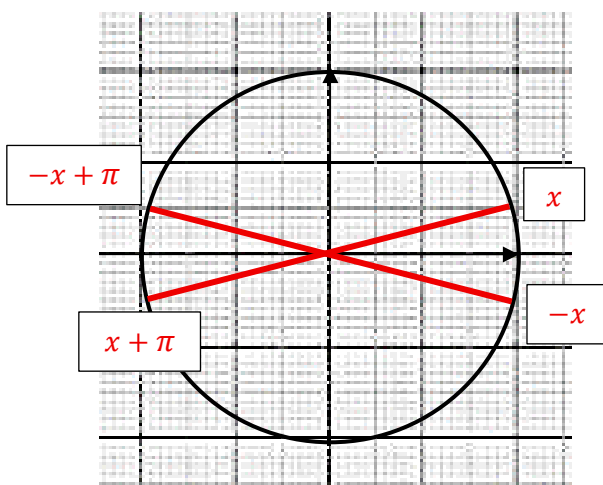
Exemple : Mesure principale de l'angle $\frac{35\pi}{2}$

$$\frac{35\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{36\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 9 \times 2\pi$$

Ainsi les angles $\frac{35\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ repèrent le même point sur le cercle trigonométrique. La mesure principale de $\frac{35\pi}{2}$ est donc $-\frac{\pi}{2}$.

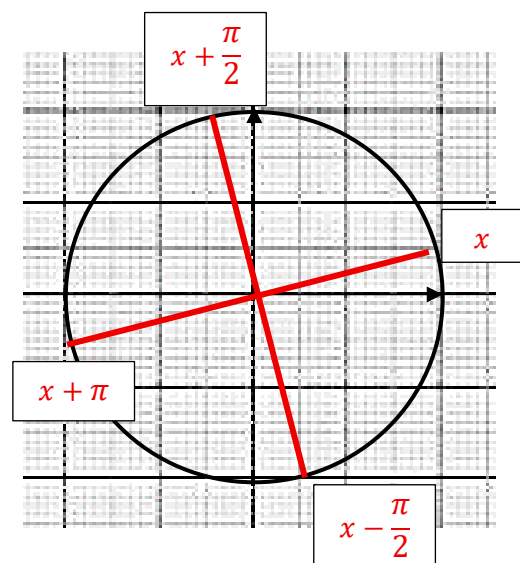


7- EGALITES A CONNAITRE :



$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$



$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

8- EXERCICES :

Exercice 1 : : Angles remarquables : Compléter le tableau ci-dessous en repérant l'angle défini sur le cercle trigonométrique et en donnant les valeurs du cosinus et du sinus de cet angle.

$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$	$\cos(\pi) = -1$
$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$	$\sin(\pi) = 0$

$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 0$	$\cos(-301\pi) = -1$
$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 1$	$\sin(-301\pi) = 0$

Exercice 2 :

- a) Convertir en degrés, la mesure suivante exprimée en radians : $\frac{7\pi}{6}$

On a la proportionnalité : $\frac{\frac{7\pi}{6} \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} = \frac{x^\circ}{180^\circ}$. On a donc : $\frac{\frac{7\pi}{6}}{\pi} = \frac{x}{180}$.

Ce qui donne : $x = \frac{\frac{7\pi}{6} \times 180}{\pi} = \frac{7}{6} \times 180 = 210^\circ$

- b) Convertir en radians sous la forme $\frac{a\pi}{b}$ ($\frac{a}{b}$ irréductible), la mesure suivante exprimées en degrés : 20°

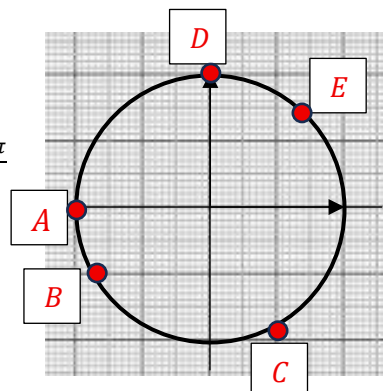
On a la proportionnalité : $\frac{x \text{ rad}}{\pi \text{ rad}} = \frac{20^\circ}{180^\circ}$. On a donc : $\frac{x}{\pi} = \frac{2}{18}$.

Ce qui donne : $x = \frac{2}{18} \pi = \frac{\pi}{9} \text{ rd}$

Exercice 3 : $\Rightarrow$ Placer les points A, B, C, D et E associés **respectivement** aux angles x suivants, sur le cercle trigonométrique ci-contre :

$$x = 9\pi ; \quad x = \frac{-5\pi}{6} ; \quad x = \frac{5\pi}{3} ; \quad x = \frac{5\pi}{2} ; \quad x = \frac{9\pi}{4}$$

$\Rightarrow$ Donner pour chaque angle la valeur du $\cos x$ et du $\sin x$ sous forme d'une fraction.



B

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

C

$$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

E

$$\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 4 : Pour chacun des angles suivants en radians : $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{119\pi}{6}$; 55 ; 2023

⇒ donner sa mesure principale,

⇒ écrire cet angle sous la forme : $\alpha + 2k\pi$ avec $-\pi < \alpha \leq +\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

<u>Mesure principale de $\frac{119\pi}{6}$:</u> Combien de tours dans cet angle ? $\frac{\frac{119\pi}{6}}{2\pi} = \frac{119\pi}{6} \times \frac{1}{2\pi} = \frac{119}{12} \approx 9,9$ On arrondit à la valeur entière la plus proche : 10 La mesure principale de $\frac{119\pi}{6}$ est : $\frac{119\pi}{6} - 10 \times 2\pi = \frac{119\pi}{6} - \frac{6 \times 20\pi}{6} = \frac{119\pi}{6} - \frac{120\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$ On peut écrire : $\frac{119\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 10 \times 2\pi$ On peut vérifier que ces 2 angles ont les mêmes valeurs de cos et sin : $\cos\left(\frac{119\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\left(\frac{119\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$	<u>Mesure principale de 2023 rd :</u> Combien de tours dans cet angle ? $\frac{2023}{2\pi} \approx 321,97$ On arrondit à la valeur entière la plus proche : 322 La mesure principale de 2023 est : $2023 - 322 \times 2\pi \approx -0,186 \text{ rd}$ On peut écrire : $2023 \approx -0,186 + 322 \times 2\pi$ On peut vérifier que ces 2 angles ont les mêmes valeurs de cos et sin : $\cos(2023) \approx \cos(-0,186) \approx 0,982$ $\sin(2023) \approx \sin(-0,186) \approx -0,184$
--	---

Exercice 5 : Compléter le tableau ci-dessous en repérant l'angle défini sur le cercle trigonométrique et en donnant les valeurs du cosinus et du sinus de cet angle.

$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$	$\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$	$\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 6 :

$\cos\left(-\frac{9\pi}{6}\right) = 0$	$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$	$\cos(26\pi) = 1$
$\sin\left(-\frac{9\pi}{6}\right) = 1$	$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$	$\sin(26\pi) = 0$

Exercice 7 : $\Rightarrow$ Sur le cercle trigo ci-contre, le point M est associé à l'angle x . Repérer les points A, B, C associés respectivement aux angles $(\frac{\pi}{2} - x)$, $(-x)$ et $(\frac{\pi}{2} + x)$

$\Rightarrow$ Simplifier l'expression suivante :

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

Par symétrie, on : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

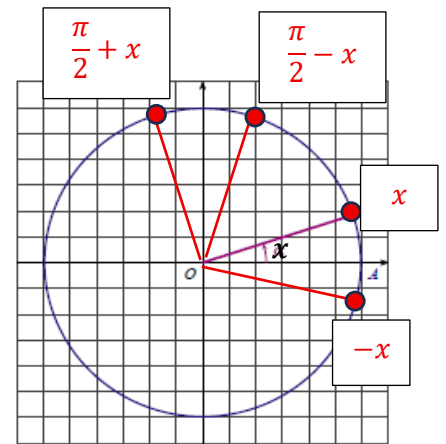
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

Finalement :

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$F = \sin(x) - \sin(x) - \sin(x)$$

$$F = -\sin(x)$$



Exercice 8 : Simplifier l'expression suivante : $G = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin(x + 2\pi) + \sin(\pi - x)$

Par symétrie, on : $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin(x)$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

Finalement :

$$G = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \sin(x + 2\pi) + \sin(\pi - x)$$

$$G = -\sin(x) - \sin(x) + \sin(x) + \sin(x)$$

$$G = 0$$

