

Chapitre 6- Nombres complexes : *forme exponentielle*

1- MODULE ET ARGUMENT D'UN NOMBRE COMPLEXE :

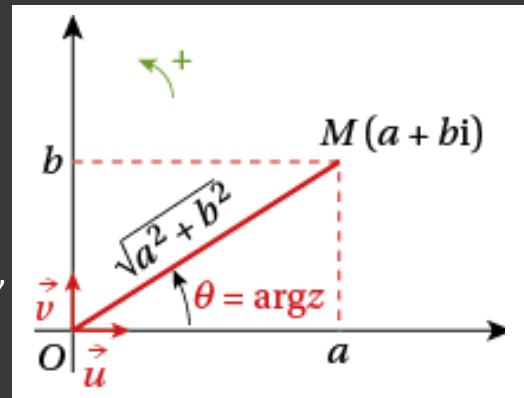
Point Cours : Soit un nombre complexe z dont la forme algébrique est $z = a + b i$

Son point image est ici noté M .

- Le MODULE de z , noté $|z|$, est égal à la distance OM . On a :

$$|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- L'ARGUMENT de z , noté $\arg(z)$, est égal à l'angle $\theta = (\vec{u}, \vec{OM})$

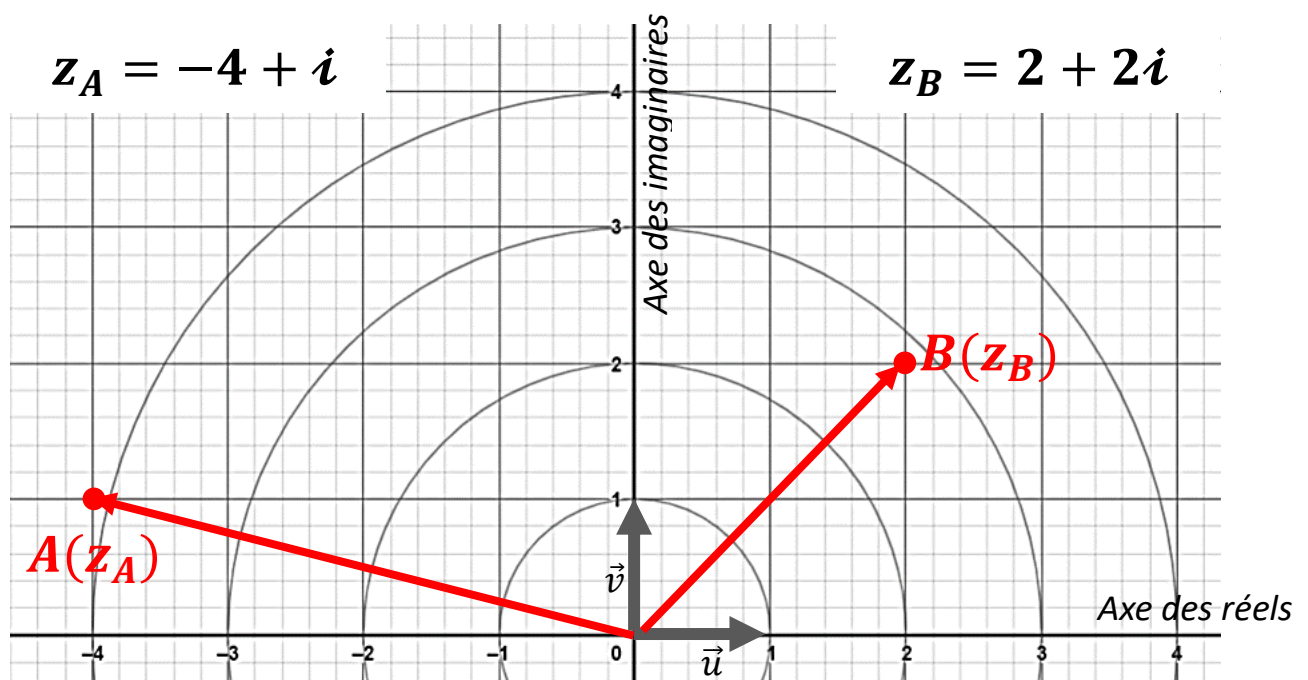


- On a les relations suivantes :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{ou} \quad a = |z| \cos(\theta)$$

$$\sin(\theta) = \frac{b}{|z|} \quad \text{ou} \quad b = |z| \sin(\theta)$$

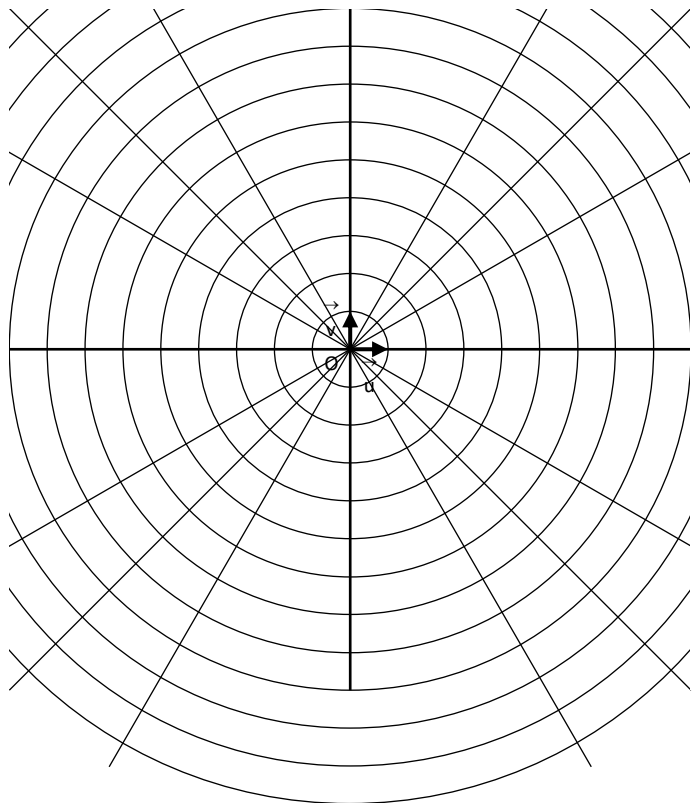
Exemple 1 : ALGEBRIQUE $\Rightarrow$ MODULE, ARGUMENT



$z_A = -4 + i$	$z_B = 2 + 2i$
<u>Module</u> :	<u>Module</u> :
<u>Argument</u> :	<u>Argument</u> :

Exemple 2 : MODULE, ARGUMENT $\Rightarrow$ ALGEBRIQUE

$ z_A = 5$ et $\theta_A = \frac{\pi}{3}$

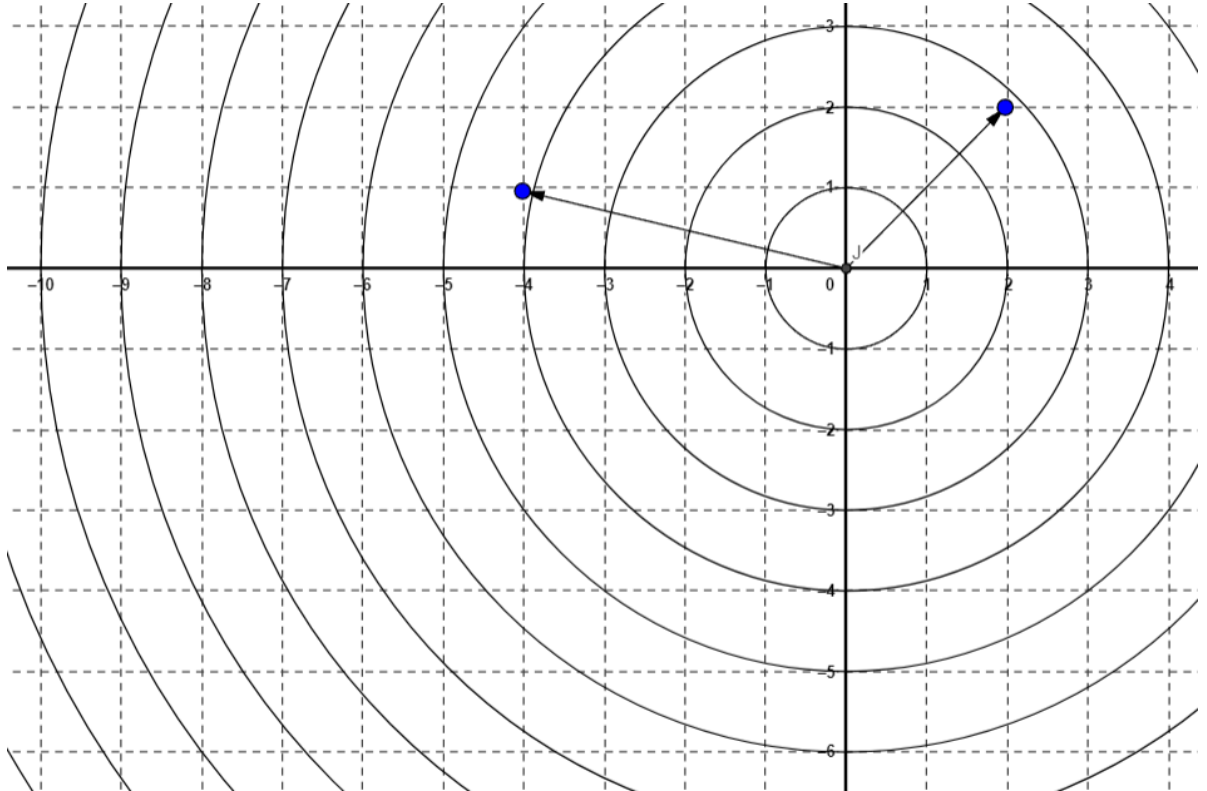


$ z_B = 8 \text{ et } \theta_B = -\frac{5\pi}{6}$	

2- PROPRIETE SUR LA MULTIPLICATION ET LA DIVISION :

a. EXEMPLE : $z_A = -4 + i$, $z_B = 2 + 2i$

Soit le nombre complexe z_C défini par : $z_C = z_A \times z_B$. On a :



On se propose de calculer le module et l'argument de $z_C = z_A \times z_B = -10 - 6i$

$z_C = -10 - 6i$
<u>Module</u> :
<u>Argument</u> :

On remarque graphiquement et cela est confirmé par les calculs, que :

$ z_C = z_A \times z_B $	
$\theta_C = \theta_A + \theta_B$	

b. PROPRIETE SUR LA MULTIPLICATION :

Point Cours : Soit deux nombres complexes z_A et z_B . Soit le nombre complexe

$$z_C = z_A \times z_B$$

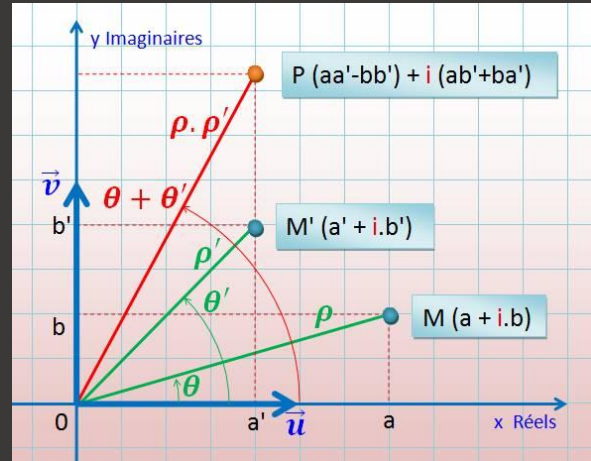
En multipliant deux nombres complexes :

- Les modules se multiplient :

$$|z_C| = |z_A| \times |z_B|$$

- Les arguments s'ajoutent :

$$\theta_C = \theta_A + \theta_B$$



c. PROPRIETE SUR LA DIVISION :

Point Cours : Soit deux nombres complexes z_A et z_B . Soit le nombre complexe

$$z_C = \frac{z_A}{z_B}$$

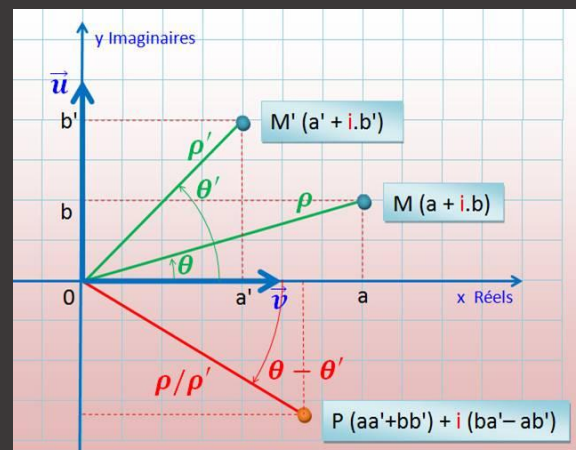
En divisant deux nombres complexes :

- Les modules se divisent :

$$|z_C| = \frac{|z_A|}{|z_B|}$$

- Les arguments se retranchent :

$$\theta_C = \theta_A - \theta_B$$



d. EXEMPLE D'APPLICATION DE CES PROPRIETES :

Soit les nombres complexes z_A et z_B définis sous forme algébrique par :

$$z_A = 2i \quad \text{et} \quad z_B = 1 - i$$

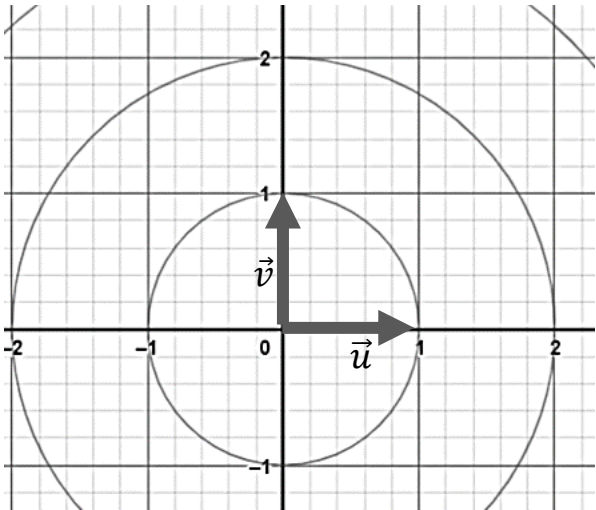
On constate graphiquement que :

$$|z_A| =$$

$$\theta_A =$$

$$|z_B| =$$

$$\theta_B =$$



En utilisant les propriétés précédentes, on peut conclure que les nombres complexes $z_A \times z_B$ et $\frac{z_A}{z_B}$ ont les caractéristiques suivantes :

$z_A \times z_B$	$\frac{z_A}{z_B}$
<u>Module</u> :	<u>Module</u> :
<u>Argument</u> :	<u>Argument</u> :

3- FORME EXPONENTIELLE :

Point Cours : Un nombre complexe z est défini sous forme algébrique par :

$$z = a + b i$$

Connaissant le module et l'argument d'un nombre complexe, on peut facilement retrouver la forme algébrique :

$$z = \underbrace{|z| \cos(\theta)} + \underbrace{|z| \sin(\theta)} i$$

Une notation dite EXPONENTIELLE a été créée afin de faciliter les opérations sur les nombres complexes :

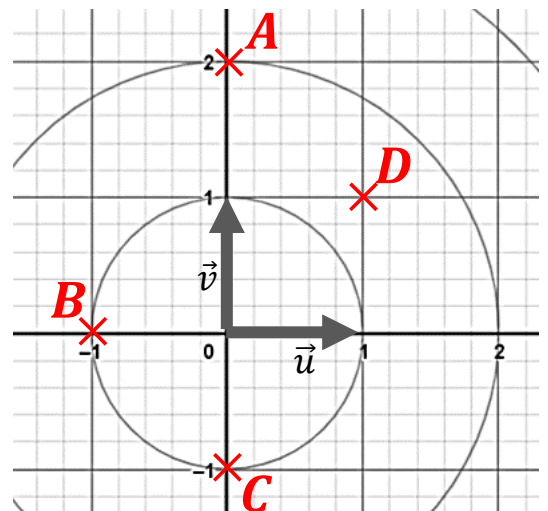
$$z = |z| e^{i \theta}$$

Finalement, un nombre complexe z peut s'écrire sous 3 formes différentes :

$$z = a + b i = |z| \cos(\theta) + |z| \sin(\theta) i = |z| e^{i \theta}$$

Exemples : module et argument des affixes, des points A, B, C et D

A	$ z =$	$\theta =$
B	$ z =$	$\theta =$
C	$ z =$	$\theta =$
D	$ z =$	$\theta =$



⇒ 3 écritures pour les affixes des points A, B, C et D

A	
B	
C	
D	

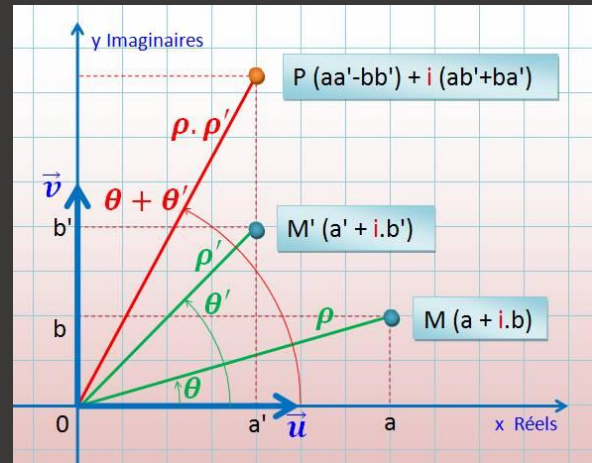
4- PROPRIETES SUR LA MULTIPLICATION, EN FORME EXPONENTIELLE :

Point Cours : Soit deux nombres complexes $z_A = |z_A| e^{i\theta_A}$ et $z_B = |z_B| e^{i\theta_B}$.
Soit le nombre complexe $z_C = z_A \times z_B$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} z_C = z_A \times z_B &= |z_A| e^{i\theta_A} \times |z_B| e^{i\theta_B} \\ &= |z_A| |z_B| e^{i\theta_A} \times e^{i\theta_B} \\ &= |z_A| |z_B| e^{i(\theta_A + \theta_B)} \end{aligned}$$

Avec la propriété naturelle des exposants, le résultat donne bien un nombre dont le module est égal au produit des modules et l'argument est égal à la somme des arguments.

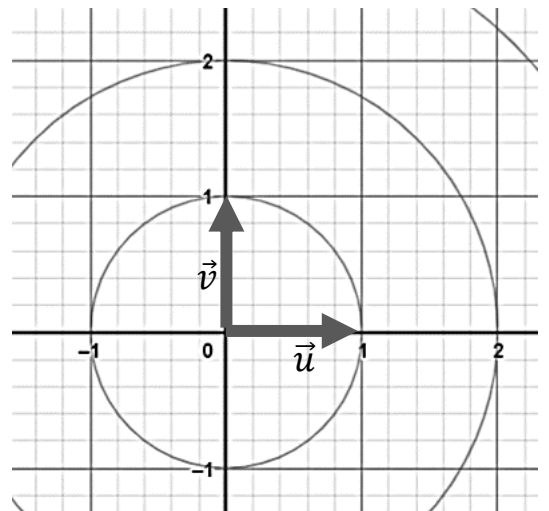


Exercice d'application :

Soit les nombres complexes z_A et z_B définis sous forme algébrique par : $z_A = 2i$ et $z_B = 1 - i$

1- Déterminer l'écriture exponentielle de z_A et z_B :

2- Calculer le produit $z_A \times z_B$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle :



Calcul sous forme algébrique	Calcul sous forme exponentielle

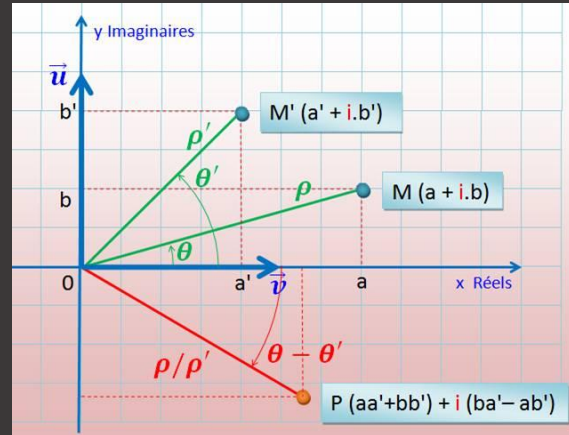
5- PROPRIETES SUR LA DIVISION, EN FORME EXPONENTIELLE :

Point Cours : Soit deux nombres complexes $z_A = |z_A| e^{i\theta_A}$ et $z_B = |z_B| e^{i\theta_B}$.

Soit le nombre complexe $z_C = \frac{z_A}{z_B}$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} z_C &= \frac{z_A}{z_B} = \frac{|z_A| e^{i\theta_A}}{|z_B| e^{i\theta_B}} \\ &= \frac{|z_A|}{|z_B|} \times \frac{e^{i\theta_A}}{e^{i\theta_B}} \\ &= \frac{|z_A|}{|z_B|} e^{i(\theta_A - \theta_B)} \end{aligned}$$



Le résultat donne bien un nombre qui a un module égal au quotient des modules et un argument égal à la différence des arguments.

Remarque : INVERSE d'un nombre complexe

$$\frac{1}{z_B} = \frac{1}{|z_B| e^{i\theta_B}} = \frac{1}{|z_B|} e^{i(-\theta_B)}$$

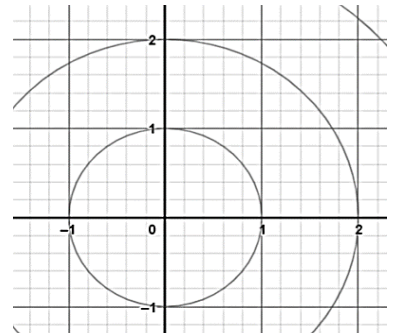
Exercice d'application :

Soit les nombres complexes z_A et z_B définis sous forme algébrique par :

$$z_A = 2i \quad \text{et} \quad z_B = 1 - i$$

1- Déterminer l'écriture exponentielle de z_A et z_B :

2- Calculer le quotient $\frac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique et sous forme exponentielle :



Calcul sous forme algébrique	Calcul sous forme exponentielle

6- EXERCICES :

EXERCICE 1. :

- 1- Déterminer la forme exponentielle de $z = 2 + 3i$
- 2- Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 - 2i$
- 3- Déterminer la forme exponentielle de $z = 2 + i$

EXERCICE 2. : Soient les nombres complexes $z_A = 2i$ et $z_B = 4 + 4i$ et $z_C = \frac{z_A}{z_B}$

- 1- Tracer les vecteurs images de z_A et z_B dans le plan complexe.
- 2- Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle en effectuant le minimum de calculs.
- 3- Déterminer la forme exponentielle de z_C en effectuant la division sous forme exponentielle.
- 4- Tracer le vecteur image de z_C dans le plan complexe.
- 5- Calculer $z_C = \frac{2i}{4+4i}$ en effectuant la division sous forme algébrique. Le vecteur image de z_C tracé auparavant correspond-t-il à ce résultat ?

EXERCICE 3. : Soient les nombres complexes $z_A = 1$ et $z_B = 0,5i$ et $z_C = \frac{z_A}{z_B}$

- 1- Tracer les vecteurs images de z_A et z_B dans le plan complexe.
- 2- Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle en effectuant le minimum de calculs.
- 3- Déterminer la forme exponentielle de z_C en effectuant la division sous forme exponentielle.
- 4- Tracer le vecteur image de z_C dans le plan complexe.
- 5- Calculer $z_C = \frac{1}{0,5i}$ en effectuant la division sous forme algébrique. Le vecteur image de z_C tracé auparavant correspond-t-il à ce résultat ?

EXERCICE 4. : Soient les nombres complexes $z_A = 1$ et $z_B = 2 + i$ et $z_C = \frac{z_A}{z_B}$

- 1- Tracer les vecteurs images de z_A et z_B dans le plan complexe.
- 2- Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle
- 3- Déterminer la forme exponentielle de z_C en effectuant la division sous forme exponentielle.
- 4- Tracer le vecteur image de z_C dans le plan complexe.
- 5- Calculer $z_C = \frac{1}{2+i}$ en effectuant la division sous forme algébrique. Le vecteur image de z_C tracé auparavant correspond-t-il à ce résultat ?

EXERCICE 5. : Soient les nombres complexes $z_A = 2 + 3i$ et $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = \frac{z_A}{z_B}$

- 1- Tracer les vecteurs images de z_A et z_B dans le plan complexe.
- 2- Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle

- 3- Déterminer la forme exponentielle de z_C en effectuant la division sous forme exponentielle.
- 4- Tracer le vecteur image de z_C dans le plan complexe.
- 5- Calculer $z_C = \frac{2+3i}{1-2i}$ en effectuant la division sous forme algébrique. Le vecteur image de z_C tracé auparavant correspond-t-il à ce résultat ?

EXERCICE 6. :

- 1- Soit $z_A = 2 e^{i \frac{-\pi}{6}}$. Donner la forme algébrique de ce nombre et le tracer dans le plan complexe.
- 2- Soit $z_B = 3 e^{i \frac{-\pi}{2}}$. Donner la forme algébrique de ce nombre et le tracer dans le plan complexe.
- 3- Soit $z_C = \sqrt{2} e^{i \frac{-3\pi}{4}}$. Donner la forme algébrique de ce nombre et le tracer dans le plan complexe.
- 4- Soit $z_D = 3 e^{1,2 i}$. Donner la forme algébrique de ce nombre et le tracer dans le plan complexe.
- 5- Soit $z_E = 4 e^{-1 i}$. Donner la forme algébrique de ce nombre et le tracer dans le plan complexe.
- 6- Soit $z_F = 2 e^{2024 i}$. Donner la forme algébrique de ce nombre et le tracer dans le plan complexe.

EXERCICE 7. : Soit les nombres complexes : $z_A = -2 - 2i$ et $z_B = 3i$

- 1- Tracer les vecteurs images de z_A et z_B dans un repère.
- 2- Calculer sous forme algébrique $z_C = z_A \times z_B$ et $z_D = \frac{z_A}{z_B}$
- 3- Donner l'écriture exponentielle de z_A
- 4- Donner l'écriture exponentielle de z_B
- 5- Calculer sous forme exponentielle $z_C = z_A \times z_B$ et $z_D = \frac{z_A}{z_B}$