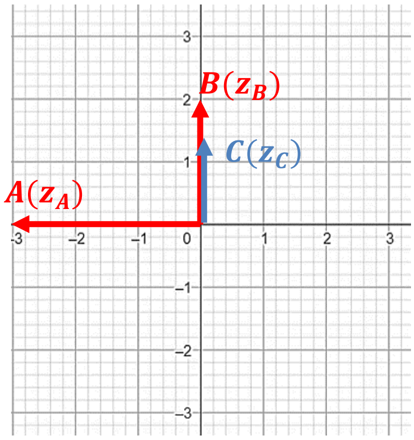
# NOMBRES COMPLEXES

***EXERCICE 1. :*** Soient les nombres complexes $z_A = -3$ , $z_B = 2\,i$ et $z_C = \frac{z_A}{z_B}$

1- Tracer les vecteurs images de $z_A$ et $z_B$ dans le plan complexe.




2- Ecrire $z_A$ et $z_B$ sous forme exponentielle sans faire de calculs.

$z_A = 3\ e^{i\,\pi}$ et $z_B = 2\,e^{i\,\frac{\pi}{2}}$

3- Déterminer la forme exponentielle de $z_C$ en effectuant la division sous forme exponentielle. Justifier.

$$|z_C| = \frac{|z_A|}{|z_B|} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\begin{aligned}\arg(z_C) &= \arg(z_A) - \arg(z_B)\\ &= \pi - \frac{\pi}{2}\\ &= \frac{2\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

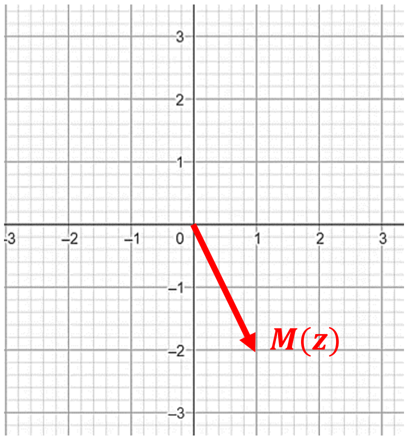
On a donc : $z_C = 1{,}5\ e^{i\,\frac{\pi}{2}}$

4- Tracer le vecteur image de $z_C$ dans le plan complexe précédent

5- Calculer $z_C = \frac{-3}{2\,i}$ en effectuant la division sous forme algébrique.

$$z_C = \frac{-3}{2\,i} = \frac{-3\ i}{2\,i^2} = \frac{-3\ i}{-2} = 1{,}5\,i$$

***EXERCICE 2. :***




1- Tracer le vecteur image du nombre complexe $z = 1 - 2\,i$

2- Déterminer la forme exponentielle de $z$ en détaillant les calculs avec une précision au centième.

On a : $|z\,| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$

Soit $\theta = \arg(z)$

On a : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

Sur calculatrice, on trouve $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 1{,}11\ rad$ et $\arcsin\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right) \approx -1{,}11\ rad$

L'angle identifié graphiquement est négatif et correspond bien à la valeur de $-1{,}11\ rad$. On peut donc écrire :

$$z \approx \sqrt{5}\ e^{-1{,}11\,i}$$

***EXERCICE 3. :*** Soit le nombre complexe $z = \frac{2+3\,i}{1-2\,i}$ .

1- Calculer le module de $z$ à partir du module du numérateur et du dénominateur (arrondir au centième).

$$|z| = \frac{|2+3\,i|}{|1-2\,i|} = \frac{\sqrt{2^2+3^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{\sqrt{4+9}}{\sqrt{1+4}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{13}{5}} = \sqrt{\frac{26}{10}} = \sqrt{2{,}6} \approx 1{,}61$$

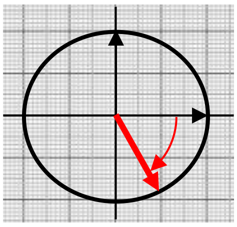
2- Réaliser la division afin de déterminer la forme algébrique de $z$. Donner le détail du calcul.

$$z = \frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)\,(1+2i)}{(1-2i)\times(1+2i)} = \frac{2+4i\;+3i+6i^2}{1+(-2)^2} = \frac{2+7i-6}{5} = \frac{-4+7i}{5} = -\frac{4}{5}+\frac{7}{5}\,i$$

On a donc : $z = -0{,}8 + 1{,}4\,i$

***EXERCICE 4. :***

1- Soit $z_A = 2\,e^{i\frac{-\pi}{3}}$ . Donner la forme algébrique de ce nombre et le tracer dans le plan complexe.



On a : $z_A = 2\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + 2\;\; i\;\, sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = 2\times\frac{1}{2} + \;2\,i\;\times\frac{-\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}\,i$

2- Soit $z_B = 5\,e^{2567\,i}$ . Donner la forme algébrique avec une précision au centième.

On a : $z_B = 5\cos(2567) + 5\;\; i\;\, sin(2567) = 5\times(-0{,}95) + \;5\,i\;\times(-0{,}31) = -4{,}75 - 1{,}55\,i$

***EXERCICE 5. :*** Soit $L$ , $\omega$ et $R$ des nombres positifs. Répondre **sans donner de justification**.

1- Donner la forme exponentielle de $z = 3\,i$ $\qquad z = 3\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

2- Donner la forme exponentielle de $z = -4$ $\qquad z = 4\,e^{i\,\pi}$

3- Donner la forme algébrique de $z = 5\,e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\qquad z = 5\,i$

4- Donner la forme exponentielle de $z = 1 - 10000\,i$ $\qquad z = 10000\,e^{i\frac{-\pi}{2}}$

5- Donner la forme exponentielle de $z = -L\omega\,i$ $\qquad z = L\omega\,e^{i\frac{-\pi}{2}}$

6- Donner la forme exponentielle de $z = -R$ $\qquad z = R\,e^{i\,\pi}$

***EXERCICE 6. :***

1- Soit $L$ un nombre positif. Soit le nombre complexe $z = \frac{1}{L\,i}$

a. Donner la forme exponentielle de $z$ en fonction de $L$

$$|z| = \frac{|1|}{|L\,i|} = \frac{1}{L}$$

$$\arg(z) = \arg(1) - \arg(L\,i)$$

$$= 0 - \frac{\pi}{2}$$

$$= -\frac{\pi}{2}$$

On a donc : $z = \frac{1}{L}\,e^{i\frac{-\pi}{2}}$

b. Donner la forme algébrique de de $z$

On peut transformer la forme exponentielle :

$$z = \frac{1}{L}\, e^{i\frac{-\pi}{2}} = 0 - \frac{1}{L} i = -\frac{1}{L} i$$

On peut aussi réaliser la division sous forme algébrique :

$$z = \frac{1}{L\, i} = \frac{i}{L\, i^2} = \frac{i}{-L} = -\frac{1}{L}\, i$$

2- Soit $C$ un nombre positif. Soit le nombre complexe $z = \frac{1 + C\, i}{i}$

a. Calculer le module de $z$ en fonction de $C$

$$|z| = \frac{|1\ +\ C\ i\,|}{|i|} = \frac{\sqrt{1 + C^2}}{1} = \sqrt{1 + C^2}$$

b. Donner la forme algébrique de de $z$

$$z = \frac{1\ +\ C\ i}{i} = \frac{(1\ +\ C\ i)\ i}{i^2} = \frac{i\ +\ C\ i^2}{-1} = \frac{i - C}{-1} = -i + C = C - i$$