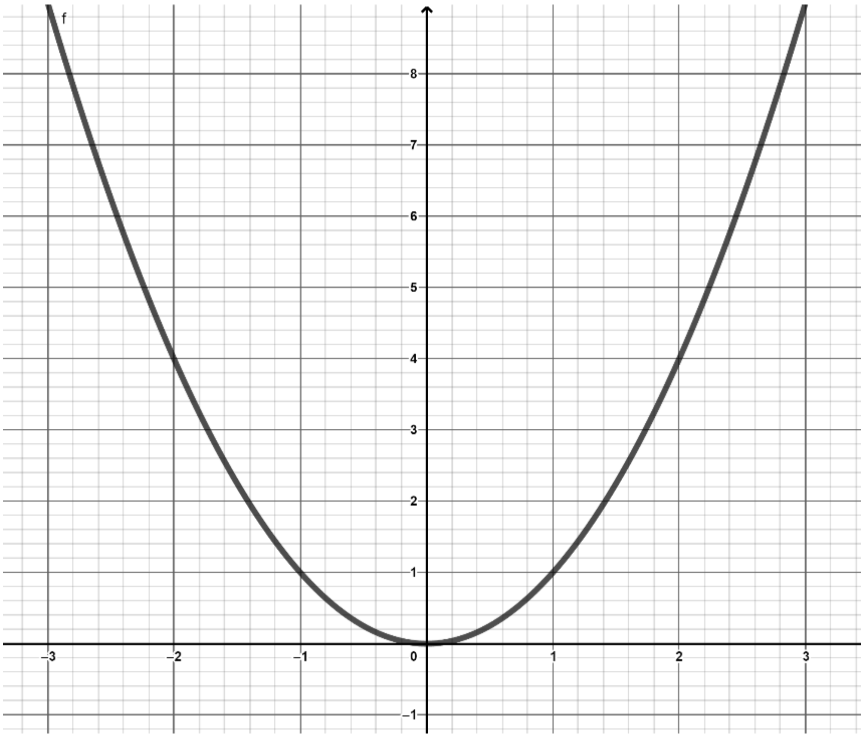
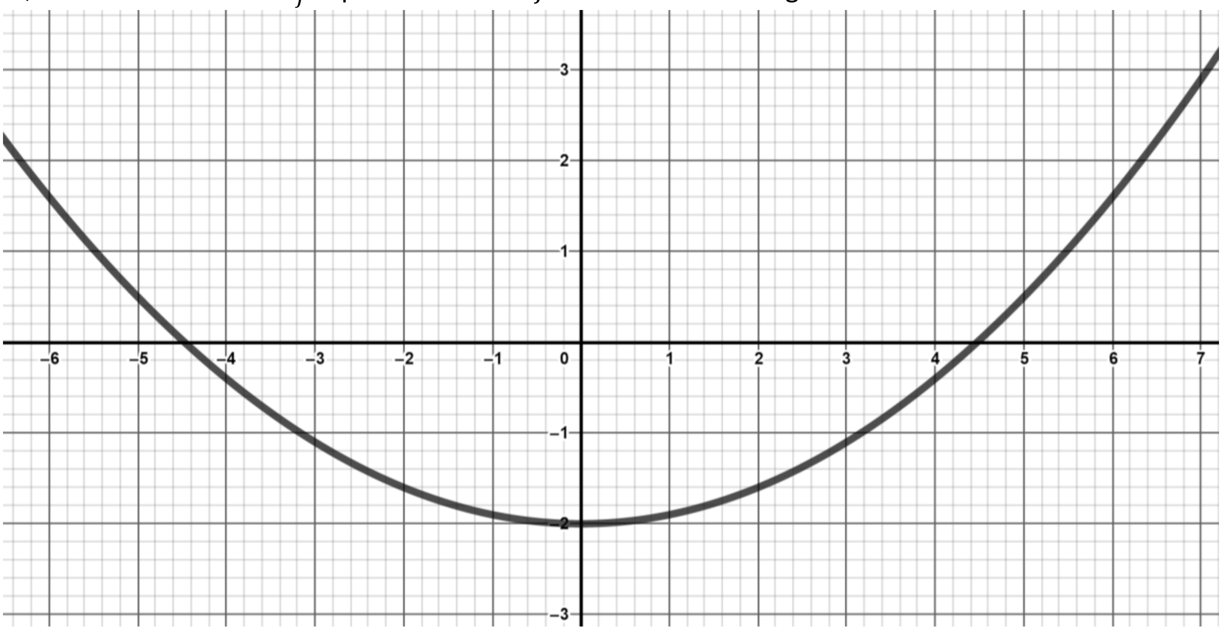
TD – BTS **DERIVATION fonctions polynômes**

Exercice 1 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x^2$. La courbe C_f représentative de f est donnée sur la figure ci-contre :



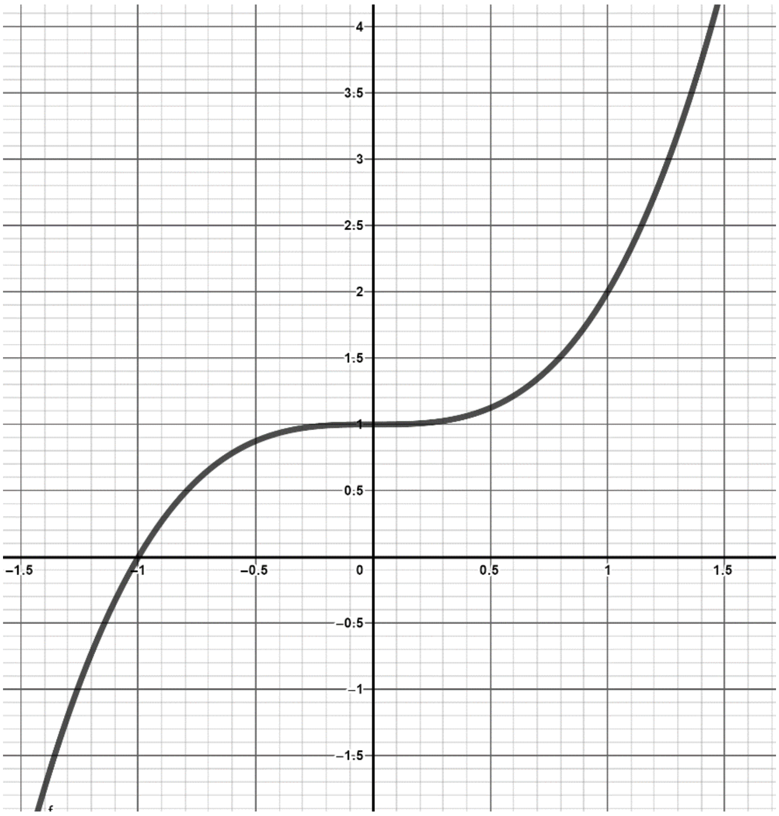
1- Calculer le taux d'accroissement : $\frac{df(x=1)}{dx} = \frac{f(1{,}01)-f(1)}{0{,}01}$
2- Déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée en utilisant les propriétés du cours.
3- Calculer $f'(1)$, $f'(-2)$ et $f'(0)$ en utilisant cette expression.
4- Utiliser ces résultats pour tracer sur la figure ci-contre, la droite tangente à C_f aux points d'abscisse $x = 1$, $x = 0$ et $x = -2$.
5- Donner l'équation de la droite tangente au point de C_f d'abscisse $a = 1$.

Exercice 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = 0{,}1\,x^2 - 2$. La courbe C_f représentative de f est donnée sur la figure ci-dessous :



1- Calculer le taux d'accroissement : $\frac{df(x=2)}{dx} = \frac{f(2{,}01)-f(2)}{0{,}01}$
2- Déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée en utilisant les propriétés du cours.
3- Calculer $f'(2)$, $f'(-4)$ et $f'(0)$ en utilisant cette expression. Comparer la valeur de $f'(2)$ avec le résultat de la question 2.
4- Utiliser ces résultats pour tracer sur la figure ci-contre, la droite tangente à C_f aux points d'abscisse $x = 2$, $x = 0$ et $x = -4$.
5- Donner l'équation de la droite tangente au point de C_f d'abscisse $a = 2$.

Exercice 3 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$. La courbe C_f représentative de f est donnée sur la figure ci-dessous :



1- Calculer le taux d'accroissement :
$$\frac{df(x=1)}{dx} = \frac{f(1{,}01) - f(1)}{0{,}01}$$

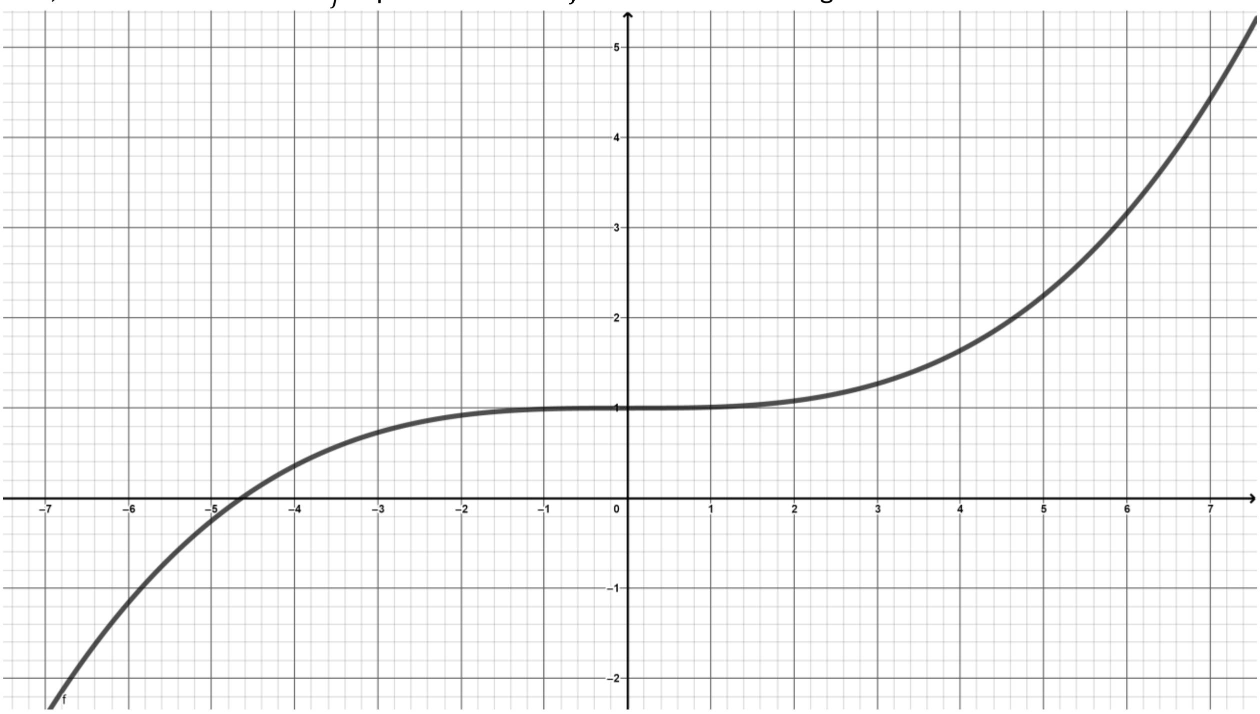
1- Déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée en utilisant les propriétés du cours.

2- Calculer $f'(1)$, $f'(-1)$ et $f'(0)$ en utilisant cette expression.

3- Utiliser ces résultats pour tracer sur la figure ci-contre, la droite tangente à C_f aux points d'abscisse $x = 1$, $x = 0$ et $x = -1$.

4- Donner l'équation de la droite tangente au point de C_f d'abscisse $a = 1$.

Exercice 4 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0{,}01x^3 + 1$. La courbe C_f représentative de f est donnée sur la figure ci-dessous :



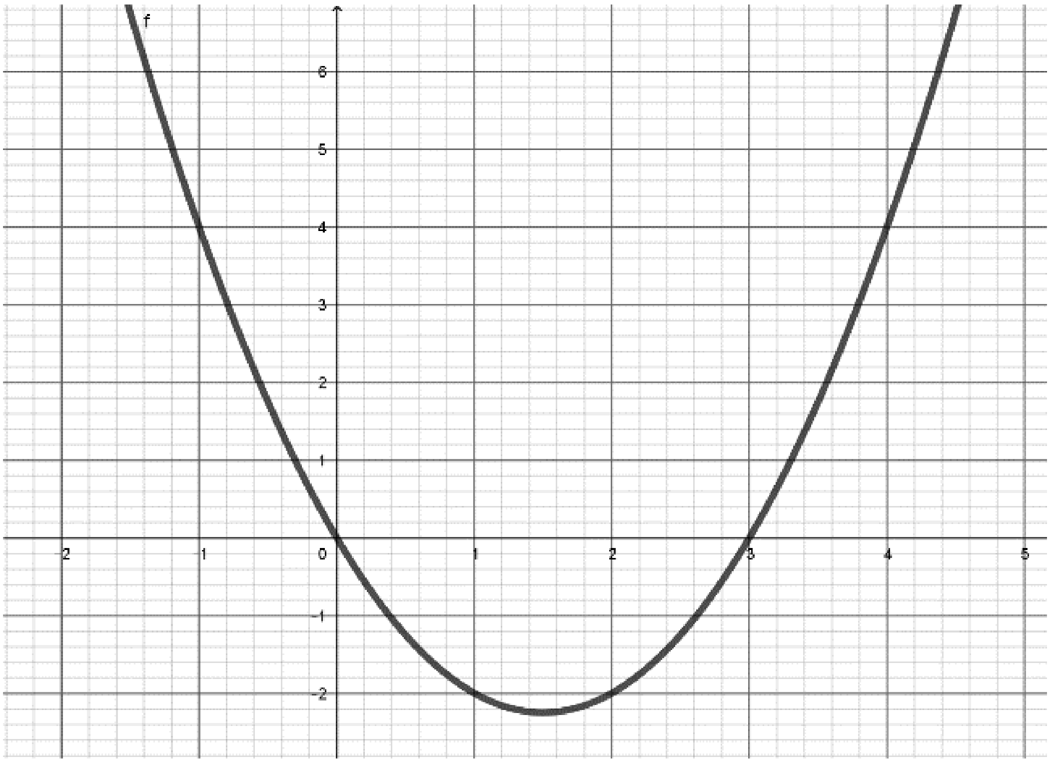
1- Déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée en utilisant les propriétés du cours.

2- Calculer $f'(6)$, $f'(-6)$ et $f'(0)$ en utilisant cette expression.

3- Utiliser ces résultats pour tracer sur la figure ci-contre, la droite tangente à C_f aux points d'abscisse $x = 6$, $x = 0$ et $x = -6$.

4- Donner l'équation de la droite tangente au point de C_f d'abscisse $a = 6$.

Exercice 5 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x$. La courbe C_f représentative de f est donnée sur la figure ci-contre :



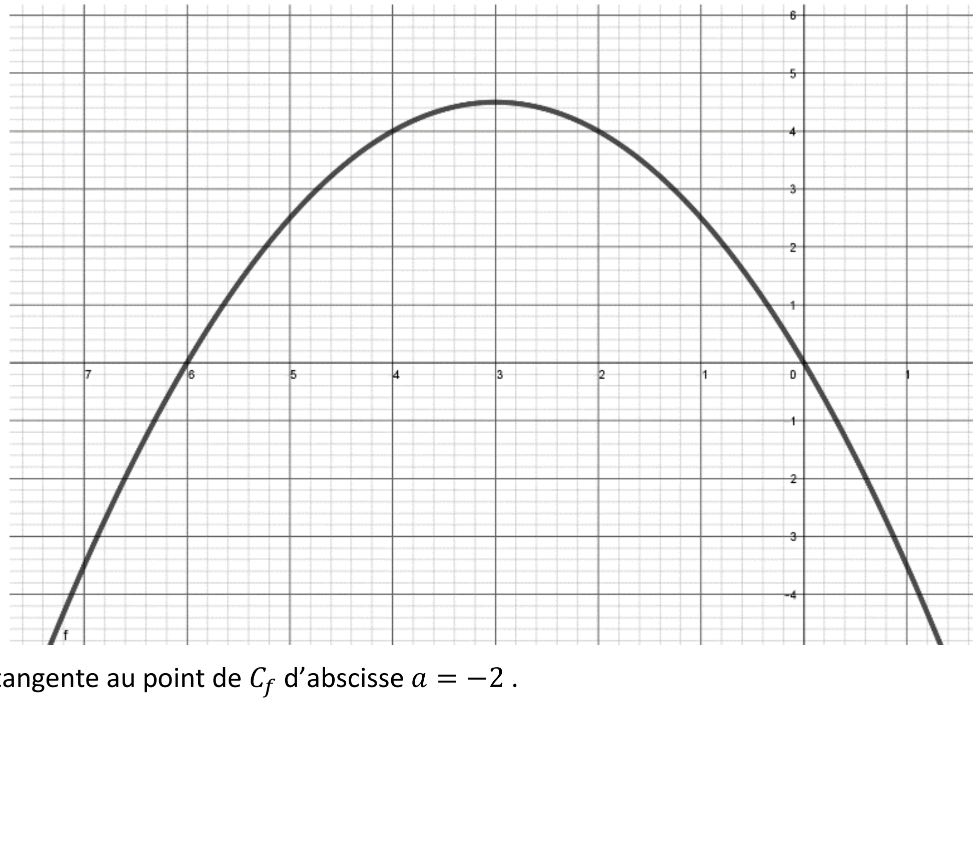
1- Déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée en utilisant les propriétés du cours.

2- Calculer $f'(0)$ et $f'(4)$ en utilisant cette expression.

3- Utiliser ces résultats pour tracer sur la figure ci-contre, la droite tangente à C_f aux points d'abscisse $x = 0$ et $x = 4$.

4- Donner l'équation de la droite tangente au point de C_f d'abscisse $a = 4$.

Exercice 6 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0{,}5x^2 - 3x$. La courbe C_f représentative de f est donnée sur la figure ci-dessous :



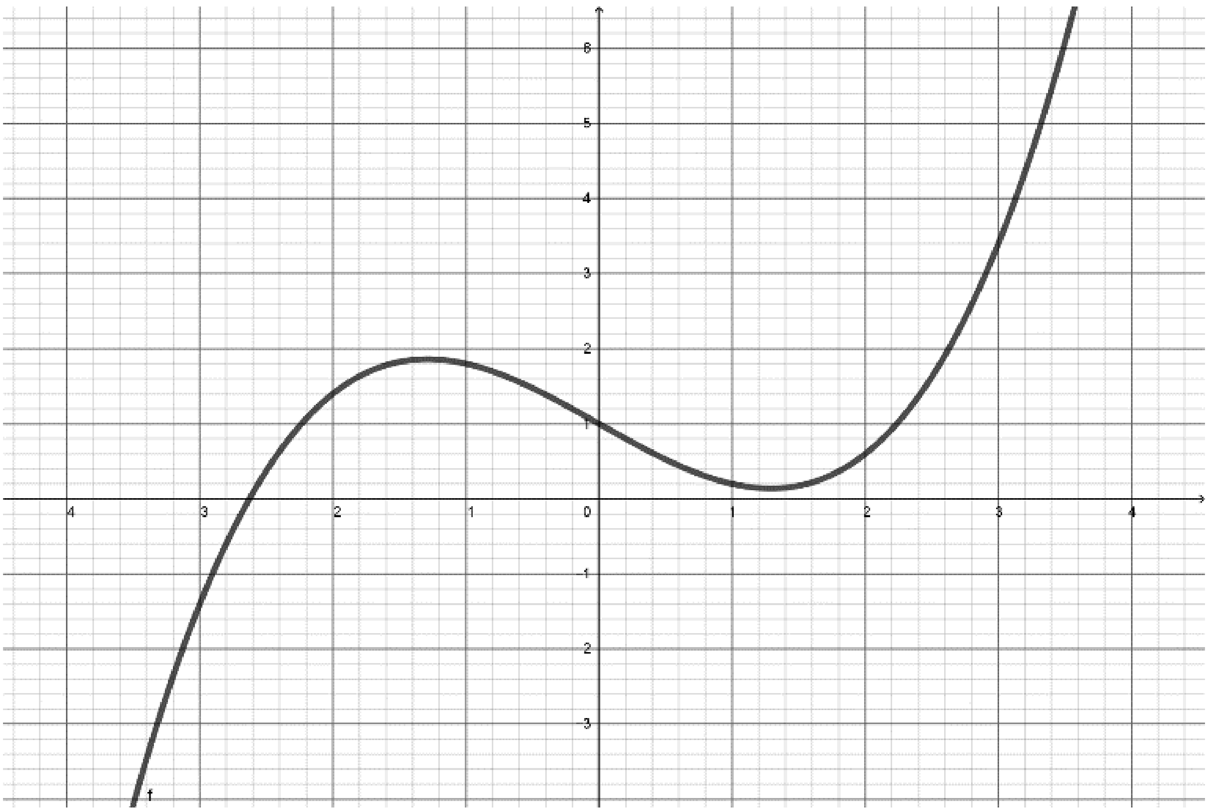
1- Déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée en utilisant les propriétés du cours.

2- Calculer $f'(-2)$ et $f'(-4)$ en utilisant cette expression.

3- Utiliser ces résultats pour tracer sur la figure ci-contre, la droite tangente à C_f aux points d'abscisse $x = -2$ et $x = -4$.

4- Donner l'équation de la droite tangente au point de C_f d'abscisse $a = -2$.

Exercice 7 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = 0{,}2\,x^3 - x + 1$. La courbe C_f représentative de f est donnée sur la figure ci-dessous :



1- Déterminer l'expression $f'(x)$ de la fonction dérivée en utilisant les propriétés du cours.
2- Calculer $f'(1)$ et $f'(3)$ en utilisant cette expression.
3- Utiliser ces résultats pour tracer sur la figure ci-contre, la droite tangente à C_f aux points d'abscisse $x = 1$ et $x = 3$.
4- Donner l'équation de la droite tangente au point de C_f d'abscisse $a = 1$.

Exercice 8 : Donner l'expression $f'(x)$ de la dérivée des fonctions f suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

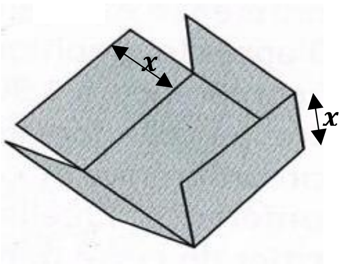
1- $f(x) = \frac{2}{3}\,x^2 - 5x + 2$
2- $f(x) = 6\,x^4 - 3\,x^3 + 8x^2 - 10x + 2019$
3 - $f(x) = \frac{1}{2}\,x^2$
4 - $f(x) = \frac{1}{5}\,x^5$

Exercice 9 : Dérivation pour étudier les variations d'une fonction

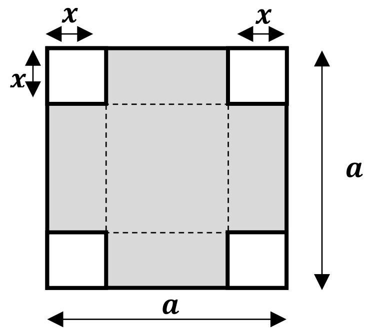
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \to f(x) = x^3 + 15x^2 - 600x + 10$. Cette fonction décrit un phénomène physique. On désire savoir comment se comporte ce phénomène, c'est-à-dire comment évolue $f(x)$ lorsque le temps x varie. Pour arriver à cet objectif, on demande de répondre aux questions suivantes :

1- Soit f' la fonction dérivée de f. Déterminer $f'(x)$
2- Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ afin de déterminer les valeurs de x pour lesquels le phénomène physique est maximum ou minimum.
3- Donner le tableau de variation complet de f en y incluant une étude de signe de $f'(x)$. Y noter les valeurs max et min que prend $f(x)$, valeurs arrondies à l'unité.
4- Tracer **l'allure** de la courbe représentative de f (*prendre une échelle quelconque- repérer les 2 tangentes horizontales*). Vérifier sur calculatrice, après réglage de la fenêtre graphique, que la courbe obtenue est identique (*sinon, retrouver l'erreur* …)

Exercice 10 : Dérivation pour optimiser la dimension d'une boite



On fabrique une boite sans couvercle avec une tôle carrée de côté a exprimé en cm. Pour cela, on enlève des carrés égaux aux 4 coins et on plie la tôle pour fermer les 4 cotés. On cherche à déterminer la profondeur x qui permet à cette boite de contenir un volume maximal.



Pour cela on définit une fonction f qui donne le volume de la boite pour une profondeur x .

Partie A : On suppose que $a = 15\ cm$

1- Montrer que l'expression $f(x)$ est : $f(x) = 4\,x^3 - 60x^2 + 225\,x$
2- Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de cette expression.
3- Construire le tableau de variation de f pour $x \in \mathbb{R}^+$
4- En déduire la profondeur x qui permet à cette boite de contenir un volume maximal

Partie B : On suppose que la longueur a n'est pas connue. On reprend les mêmes questions que dans la partie A, en travaillant à présent avec une valeur littérale de a

1- Montrer que l'expression $f(x)$ est : $f(x) = 4\,x^3 - 4\,a\,x^2 + a^2\,x$
2- Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de cette expression.
3- Construire le tableau de variation de f pour $x \in \mathbb{R}^+$
4- En déduire en fonction de a, la profondeur x qui permet à cette boite de contenir un volume maximal