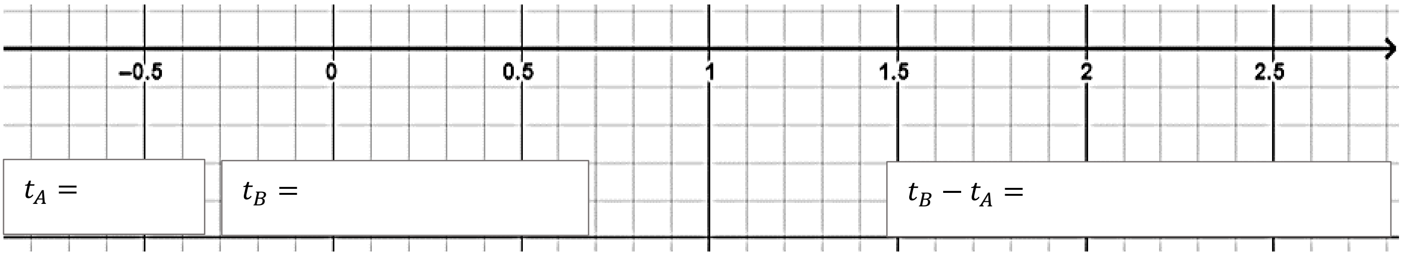
Chapitre 7 - Nombre dérivé

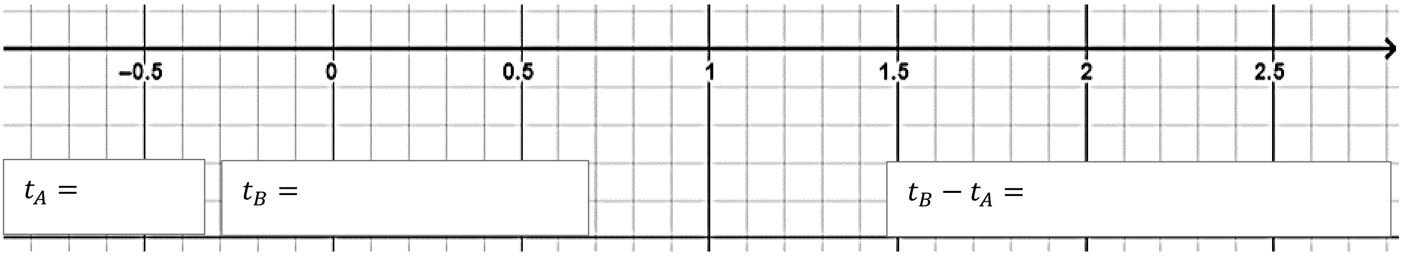
On découvre dans ce chapitre la dérivation, en s'appuyant sur l'exemple traité en Tp, d'une modélisation d'un mouvement masse + ressort.

1- CALCUL DIFFERENTIEL : NOTATION

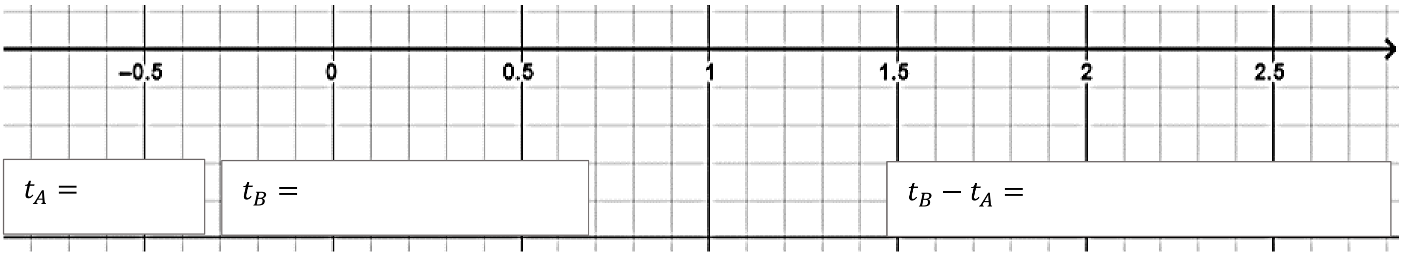
a. EXEMPLE 1 : $t = 0{,}5$ et $\Delta t = 2$. Repérer ci-dessous les points A et B d'abscisses t et $t + \Delta t$



b. EXEMPLE 2 : $t = 0{,}5$ et $\Delta t = 0{,}2$. Repérer ci-dessous les points A et B d'abscisses t et $t + \Delta t$



c. EXEMPLE 3 : $t = 0{,}5$ et $\mathrm{d}t = 0{,}02$. Repérer ci-dessous les points A et B d'abscisses t et $t + \mathrm{d}t$



Point Cours :

Le calcul différentiel est une branche des mathématiques dans laquelle on a des variations infiniment petites d'une variable.

- Pour une variable t, une variation infiniment petite de t est notée
- Pour une variable x, une variation infiniment petite de x est notée

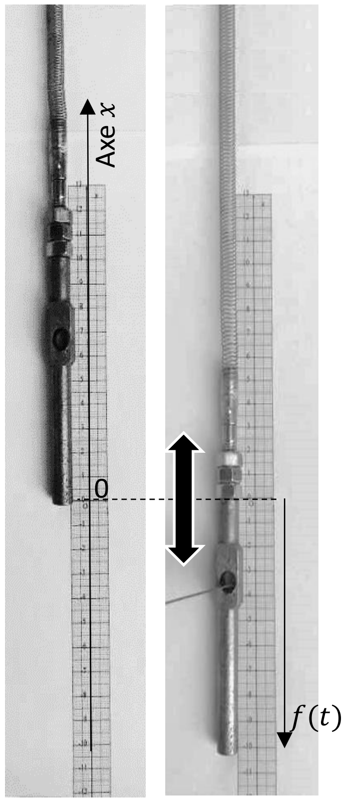
2- Nombre derive pour une fonction reperant la position d'une piece qui oscille :

Les fonctions sont généralement utilisées pour modéliser un phénomène physique, qui varie en fonction d'un paramètre. Par exemple, si on s'intéresse

au phénomène « *oscillation d'une masse de 100 g suspendue à un ressort*», on a vu en Tp, que la fonction f définie par la formule suivante :

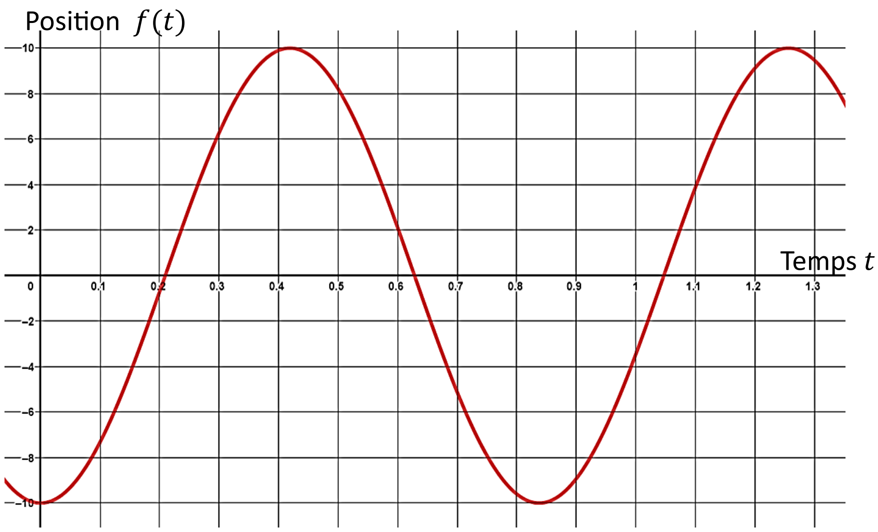
$$f(t) = -10 \cos(7{,}5\, t)$$

donnait la position de l'extrémité de la masse, dans un repère x vertical, en fonction du temps t . Dans cette formule, t est exprimé en secondes. La position $f(t)$ est exprimée en centimètres.



La courbe représentative de cette fonction est la suivante :

Dans cet exemple, le nombre dérivé, noté $f'(t)$, correspond à la vitesse instantanée de la masse, au temps t.



Point Cours :

En mathématiques, pour une fonction f dont le paramètre est le temps t, le nombre dérivé en un temps t, mesure la ____________ d'évolution de f , pour ce temps t. Il peut être calculé par la relation :

$$f'(t) = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt}$$

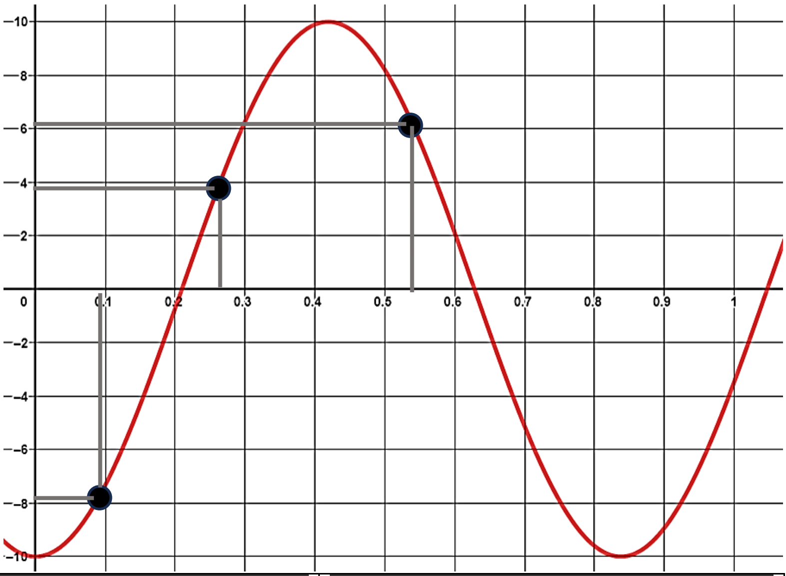
dt étant une variation infiniment petite de t .

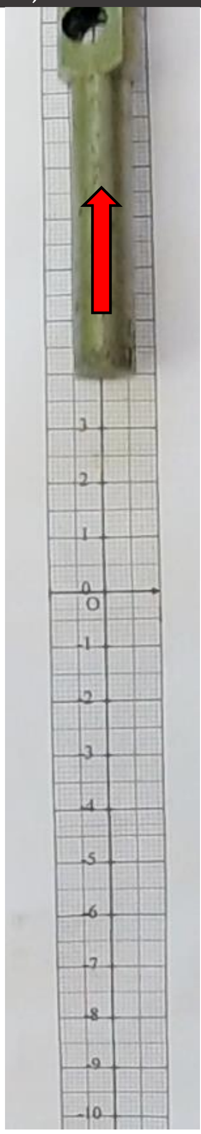
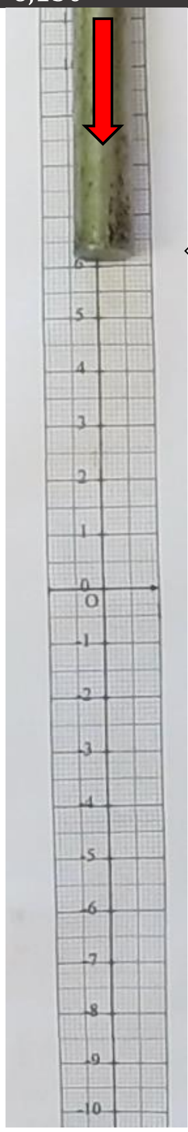
Si on utilise une valeur pour dt de

$$dt = 0{,}001\ s\ ,$$

on peut par exemple, calculer la vitesse aux temps t suivants :

- $t = 0{,}09\ s$ pour le premier point,
- $t = 0{,}26\ s$ pour le second,
- $t = 0{,}54 s$ pour le troisième.



$t = 0{,}09\ s$ $f(t) = -10\cos(7{,}5 \times 0{,}09)$ $f(t) \approx -7{,}807$	$t = 0{,}26\ s$ $f(t) = -10\cos(7{,}5 \times 0{,}26)$ $f(t) \approx 3{,}702$	$t = 0{,}54\ s$ $f(t) = -10\cos(7{,}5 \times 0{,}54)$ $f(t) \approx 6{,}150$
 ⇦ $\mathbf{-7,8}$	 ⇦ $\mathbf{+3,7}$	 ⇦ $\mathbf{+6,15}$
$f(t) = f(0{,}09) \approx -7{,}807$ cm	$f(t) = f(0{,}26) \approx 3{,}702$ cm	$f(t) = f(0{,}54) \approx 6{,}150$ cm
$f(t+dt) = f(0{,}091) \approx -7{,}760$ cm	$f(t+dt) = f(0{,}261) \approx 3{,}771$ cm	$f(t+dt) = f(0{,}541) \approx 6{,}091$ cm
$f'(t) \approx \frac{-7{,}760-(-7{,}807)}{0{,}001} \approx 47$ cm/s	$f'(t) \approx \frac{3{,}771-3{,}702}{0{,}001} \approx 69$ cm/s	$f'(t) \approx \frac{6{,}091-6{,}150}{0{,}001} \approx -59$ cm/s

3- AUTRE NOTATION POUR LE NOMBRE DERIVE :

Point Cours : Le nombre dérivé lorsque le paramètre prend une valeur particulière, $t = a$ par exemple, se note :

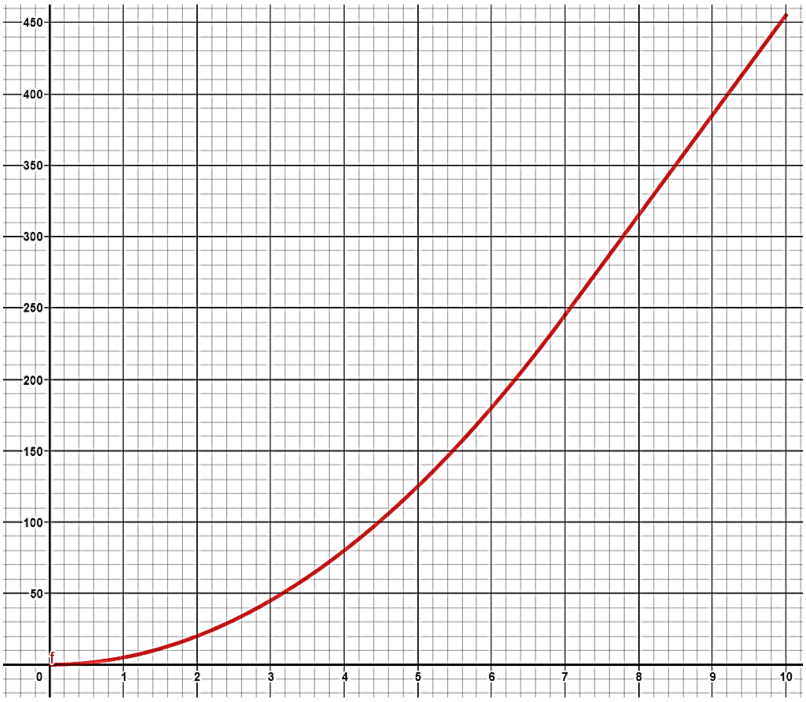
- $f'(a)$ en mathématiques. C'est la notation de *Lagrange* (mathématicien italien du 18ième siècle).
- $\frac{df}{dt}(a)$ ou $\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=a}$. C'est la notation de *Leibnitz* (mathématicien allemand du 17ième siècle).

4- EXERCICES :

En essai sur circuit automobile, la position en mètre d'une Tesla est modélisée par une fonction f dont le paramètre est le temps t , exprimé en secondes :

- Pour $t \in [0\,;7]$: $f(t) = 5\,t^2$
- Pour $t \in [7\,;10]$: $f(t) = 70\,t - 245$

La courbe représentative est la suivante :



Calcul de la vitesse au temps $t = 3\,s$ en prenant $dt = 0{,}001\,s$: *(précision au mm)* .

$f(3) =$

$f(3{,}001) =$

$f'(3) \approx \frac{f(3{,}001) - f(3)}{0{,}001}$

$f'(3) \approx \frac{\qquad}{0{,}001}$

$f'(3) \approx$

Calcul de la vitesse au temps $t = 6\,s$ en prenant $dt = 0{,}001\,s$:

$f(6) =$

$f(6{,}001) =$

$f'(6) \approx \frac{f(6{,}001) - f(6)}{0{,}001}$

$f'(6) \approx \frac{\qquad}{0{,}001}$

$f'(6) \approx$

Calcul de la vitesse au temps $t = 9\,s$ en prenant $dt = 0{,}001\,s$:

$f(9) =$

$f(9{,}001) =$

$f'(9) \approx \frac{f(9{,}001) - f(9)}{0{,}001}$

$f'(9) \approx \frac{\qquad}{0{,}001}$

$f'(9) \approx$