CoAnim - Fonctions dérivées

1- PREMIER EXEMPLE : EXEMPLE CONCRET

En essai sur circuit automobile, on mesure la distance, en mètres, parcourue par une Tesla en phase de démarrage sur 7 secondes. Cette distance peut être modélisée par une fonction f définie par $f(t) = 5\,t^2$ pour $t \in [0\,;7]$. En utilisant cette formule, on peut par exemple calculer :

- au temps $t = 0$, la distance parcourue qui sera de $f(0) = 5 \times 0^2 = 0$ m,
- au temps $t = 0{,}1$ s, elle sera de $f(0{,}1) = 5 \times 0{,}1^2 = 0{,}05$ m,
- au temps $t = 1$ s, elle sera de $f(1) = 5 \times 1^2 = 5$ m,
- Au temps $t = 7$ s, elle sera de $f(7) = 5 \times 7^2 = 245$ m.

On a vu en cours que si une fonction f était exprimée en fonction du temps t , le nombre dérivé $f'(t)$ permettait de connaître la vitesse instantanée d'évolution de f à ce temps t :

$$f'(t) = \frac{df}{dt}(t) = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} \quad \text{avec} \quad dt \approx 0$$

Distance parcourue en dt secondes

temps

Par exemple au temps $t = 6\,s$, si on prend $dt = 0{,}000001$, le nombre dérivé est :

$$f'(6) = \frac{df}{dt}(6) = \frac{f(6+0{,}000001) - f(6)}{0{,}000001}$$

$$= \frac{f(6{,}000001) - f(6)}{0{,}000001}$$

$$= \frac{5\times 6{,}000001^2 - 5\times 6^2}{0{,}000001}$$

$$= \frac{180.000060000005 - 180}{0{,}000001}$$

$$= 60{,}000005$$

La vitesse de la Tesla au temps $t = 6\,s$ sera ainsi d'environ 60 m/s (ou ~216 km/h).

L'objectif du travail proposé ici est de s'intéresser aux **FONCTIONS DERIVEES**.

Pour déterminer $f'(6)$ on a réalisé le calcul numérique $\frac{f(6+0{,}000001)-f(6)}{0{,}000001}$. On peut procéder autrement.

On montre en mathématiques qu'il est possible de trouver une expression de $f'(t)$ en fonction de t. Cette expression est ici :

$$f'(t) = \frac{df}{dt}(t) = 10\,t$$

Avec cette expression, on dispose d'une formule qui permet de trouver autrement la vitesse instantanées de la Tesla, par exemple au temps $t = 6$ s , si on utilise cette formule, on trouve :

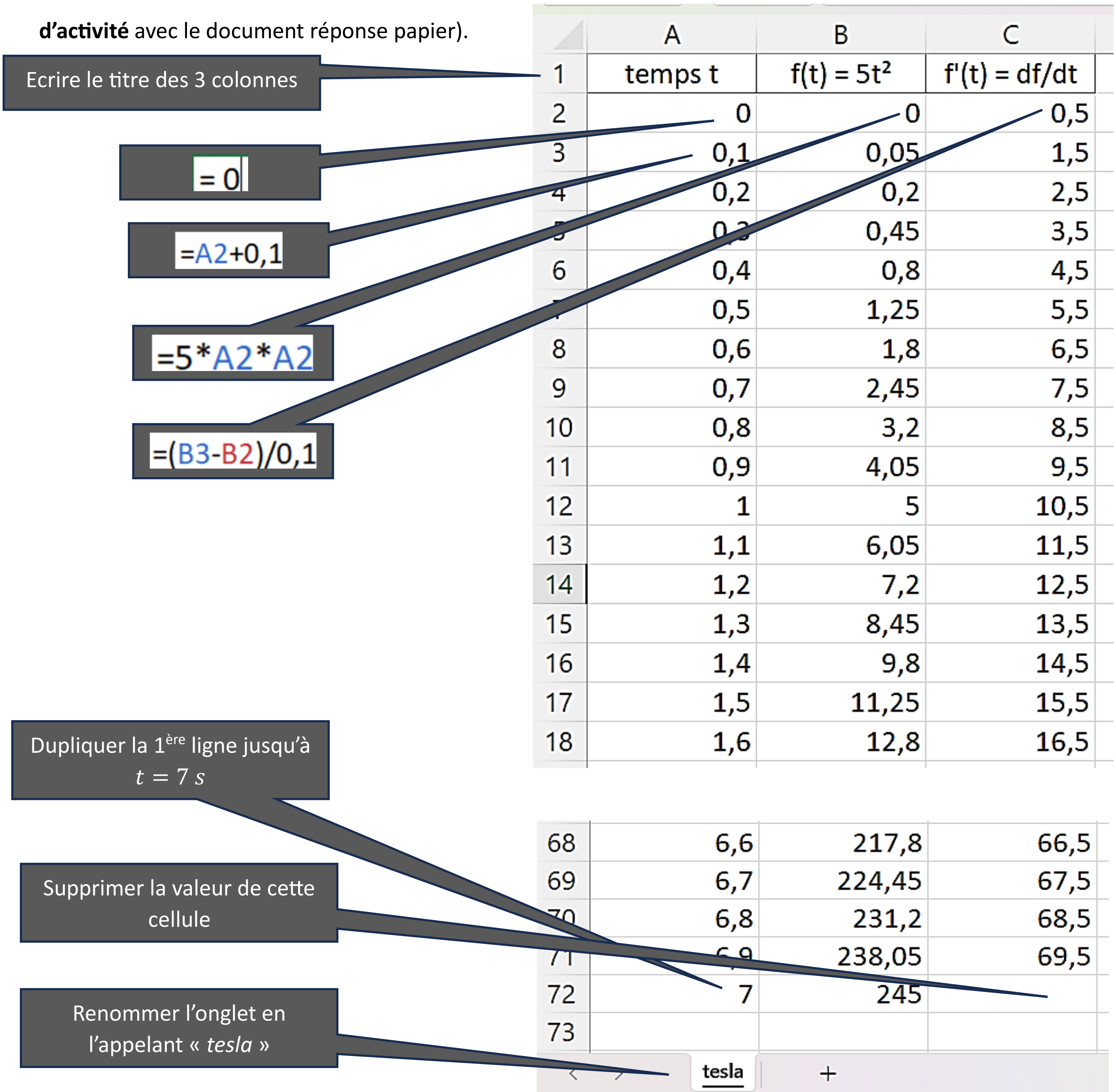
$$f'(6) = \frac{df}{dt}(6) = 10 \times 6 = 60$$

… et on retrouve la vitesse de 60 m/s trouvée précédemment.

Pour débuter ce TP, on vérifie avec Excel que si une fonction f est définie par $f(t) = 5\,t^2$ pour $t \in [0\,;7]$,

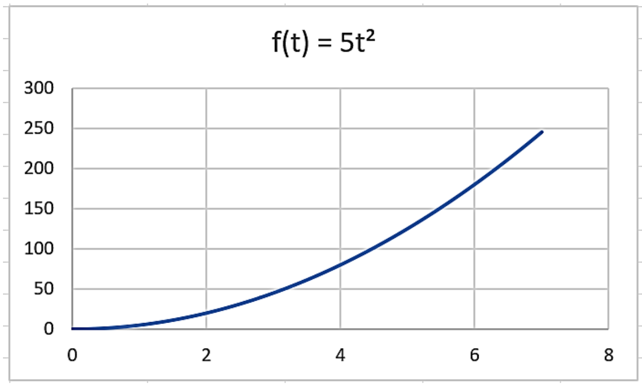
alors il suffit d'utiliser la relation $f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = 10\,t$ pour calculer le nombre dérivé au temps t.

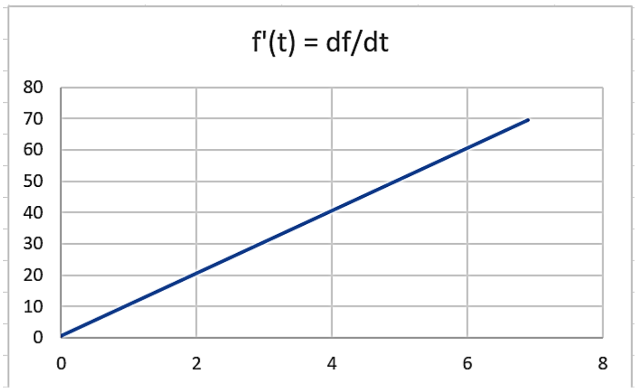
⇨ Ouvrir un fichier Excel et l'enregistrer sous le nom « *fonctionsDerivesPrenomNom.xlsx* » (… **à rendre en fin d'activité** avec le document réponse papier).



	A	B	C
1	temps t	f(t) = 5t²	f'(t) = df/dt
2	0	0	0,5
3	0,1	0,05	1,5
4	0,2	0,2	2,5
5	0,3	0,45	3,5
6	0,4	0,8	4,5
7	0,5	1,25	5,5
8	0,6	1,8	6,5
9	0,7	2,45	7,5
10	0,8	3,2	8,5
11	0,9	4,05	9,5
12	1	5	10,5
13	1,1	6,05	11,5
14	1,2	7,2	12,5
15	1,3	8,45	13,5
16	1,4	9,8	14,5
17	1,5	11,25	15,5
18	1,6	12,8	16,5
68	6,6	217,8	66,5
69	6,7	224,45	67,5
70	6,8	231,2	68,5
71	6,9	238,05	69,5
72	7	245	
73			

⇨ En sélectionnant d'abord les colonnes A et B, ensuite les colonnes A et C (utiliser la touche Ctrl), insérer les courbes suivantes :

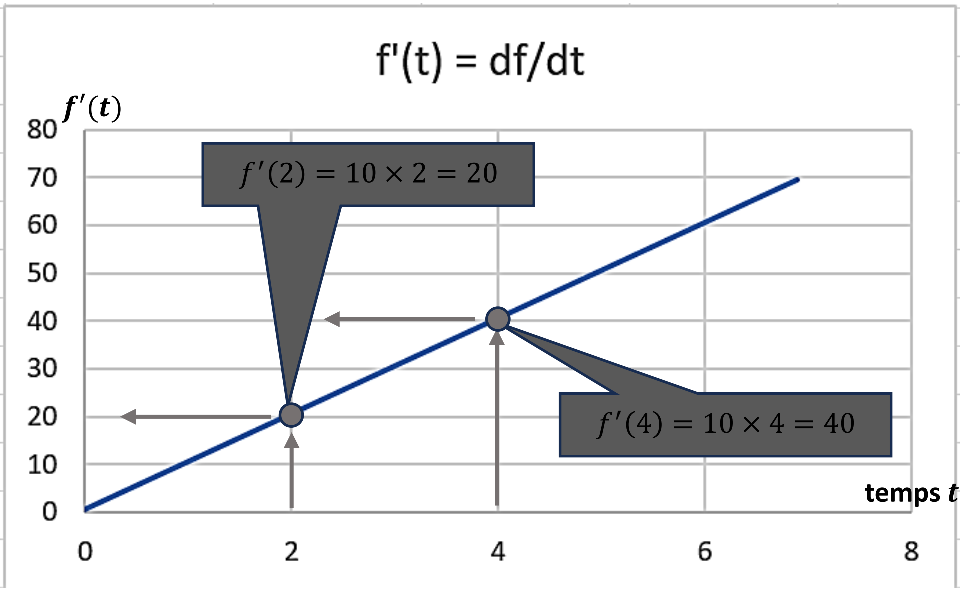




On constate que sur la courbe donnant l'évolution des nombres dérivés, la relation $f'(t) = \frac{df}{dt}(t) = 10\,t$ est vérifiée pour tous les temps t.

… si on arrondit les valeurs.

On ne retrouve pas exactement $10\,t$ car dt n'est pas infiniment petite (ici $dt = 0{,}1$).



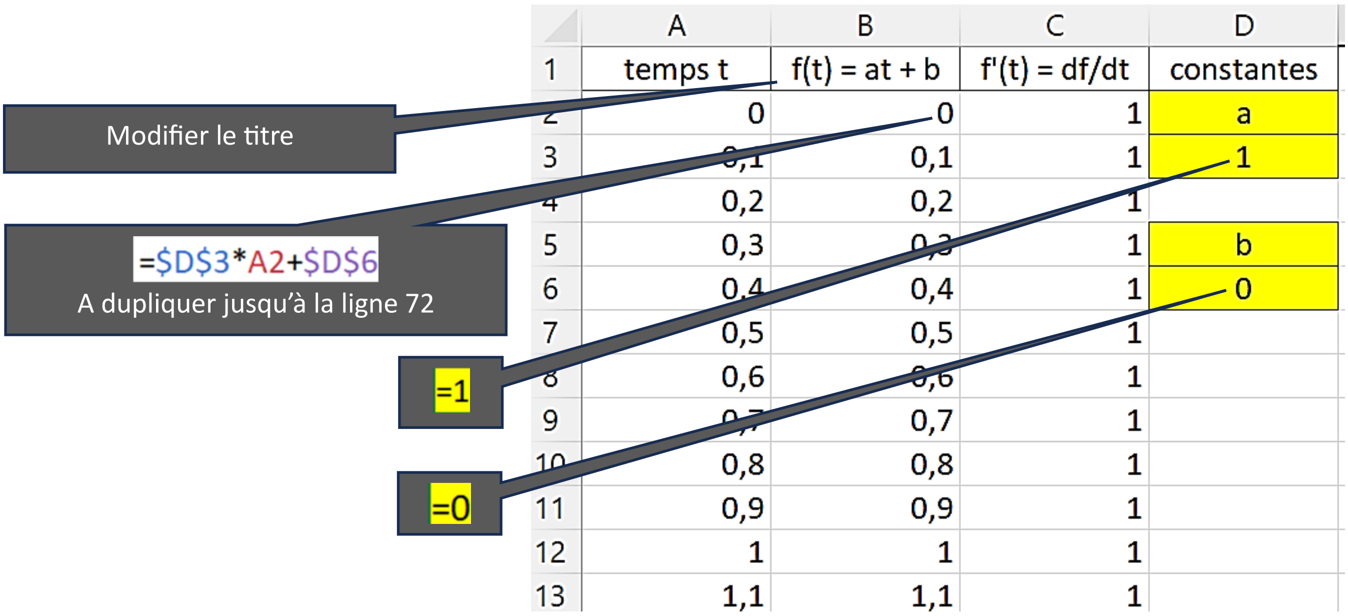
2- DEUXIEME EXEMPLE : DERIVEE DES FONCTIONS AFFINES DU TYPE : $f(t) = a\,t + b$

L'objectif de ce paragraphe est d'utiliser Excel pour pouvoir déterminer l'expression de la fonction dérivée $f'(t) = \frac{df}{dt}(t)$ si la fonction f est une fonction affine, c'est-à-dire que la formule qui donne $f(t)$ est de la forme $f(t) = a\,t + b$, a et b étant des nombres réels quelconques.

⇨ Ouvrir une 2ième feuille en cliquant sur le + de la barre des onglets. La renommer tesla fctsAffines

⇨ Copier-coller les lignes 1 à 72 des colonnes A, B et C de la feuille Tesla, dans cette nouvelle feuille fctsAffines.

⇨ Modifier les éléments suivants afin d'avoir à présent dans la colonne B, une fonction du type $f(t) = at + b$.

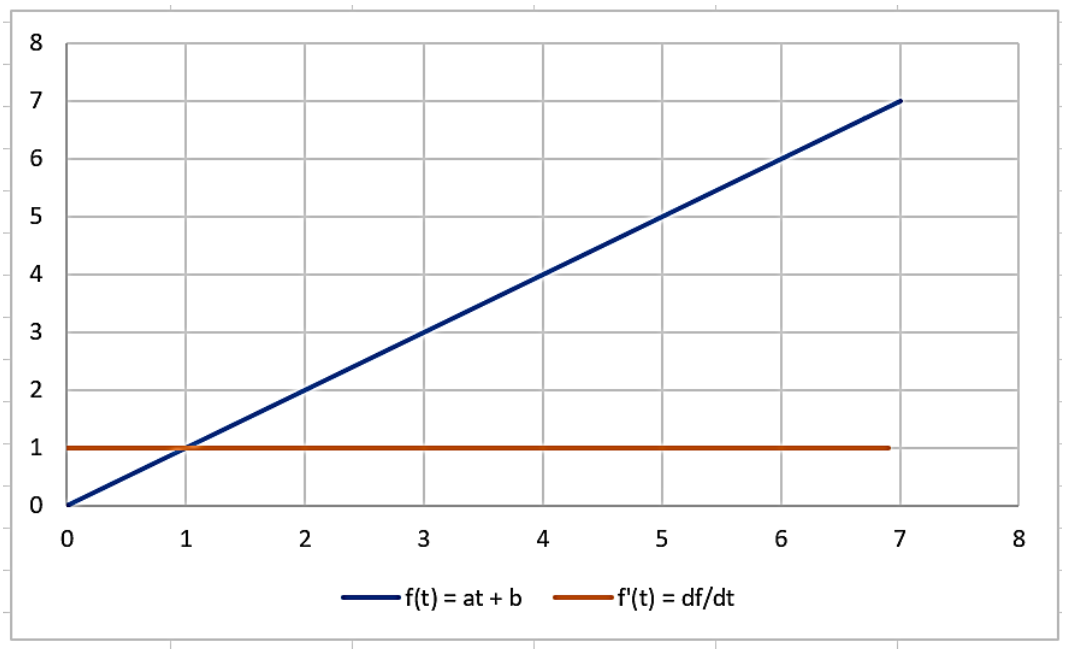


	A	B	C	D
1	temps t	f(t) = at + b	f'(t) = df/dt	constantes
2	0	0	1	a
3	0,1	0,1	1	1
4	0,2	0,2	1	
5	0,3	0,3	1	b
6	0,4	0,4	1	0
7	0,5	0,5	1	
8	0,6	0,6	1	
9	0,7	0,7	1	
10	0,8	0,8	1	
11	0,9	0,9	1	
12	1	1	1	
13	1,1	1,1	1	

⇨ Sélectionner les 3 colonnes A, B et C cette fois-ci et insérer le nuage de points ci-dessous :

On constate que les valeurs de $f'(t)$ sont toujours égales à 1. On a donc toujours, pour tous les temps t, la relation :

$$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = 1$$



⇨ Modifier la valeur de a de la cellule D3 en prenant par exemple $a = 2$ et observer ce que cela entraîne comme modification sur les 2 courbes … les valeurs de $f'(t)$ sont toujours égales … mais à présent à 2.

⇨ Modifier de même les valeurs de a sur la cellule D3 et de b, sur la cellule D6, en prenant successivement celles du tableau ci-dessous. Observer ce que cela entraîne comme modification sur les courbes et les valeurs prises par $f(t)$ et $f'(t)$. Compléter ce tableau en donnant la relation exprimant $f'(t)$:

a	b	$f(t)$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t)$
1	**0**	$f(t) = t$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = 1$
2	**0**	$f(t) = 2\,t$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = 2$
2	**0**		
2	**1**		
2	**-5**		
10	**-30**		
-5	**0**		
-5	**10**		

⇨ Conclure en donnant la relation qui permet de trouver directement $f'(t) = \frac{df}{dt}(t)$:

Si $f(t) = a\,t + b$ alors $f'(t) = \frac{df}{dt}(t) =$

3- TROISIEME EXEMPLE : DERIVEE DES FONCTIONS DU TYPE : $f(t) = a\,t^2 + b$

L'objectif est ici de refaire la même chose qu'avant, mais ici avec des fonctions du type $f(t) = a\,t^2 + b$, a et b étant des nombres quelconques.

⇨ Ouvrir une 3ième feuille. La renommer tesla | fctsAffines | at^2+b

⇨ Copier-coller les colonnes A, B et C de la feuille fctsAffines, dans cette nouvelle feuille at^2+b.

⇨ Modifier les éléments suivants afin d'avoir à présent dans la colonne B, une fonction du type $f(t) = at^2 + b$.

Modifier le titre

=\$D\$3*A2*A2+\$D\$6

A dupliquer jusqu'à la ligne 72

=1

=0

	A	B	C	D
1	temps t	f(t) = at² +b	f'(t) = df/dt	constantes
2	0	0	0,1	a
3	0,1	0,01	0,3	1
4	0,2	0,04	0,5	
5	0,3	0,09	0,7	b
6	0,4	0,16	0,9	0
7	0,5	0,25	1,1	
8	0,6	0,36	1,3	
9	0,7	0,49	1,5	
10	0,8	0,64	1,7	
11	0,9	0,81	1,9	
12	1	1	2,1	

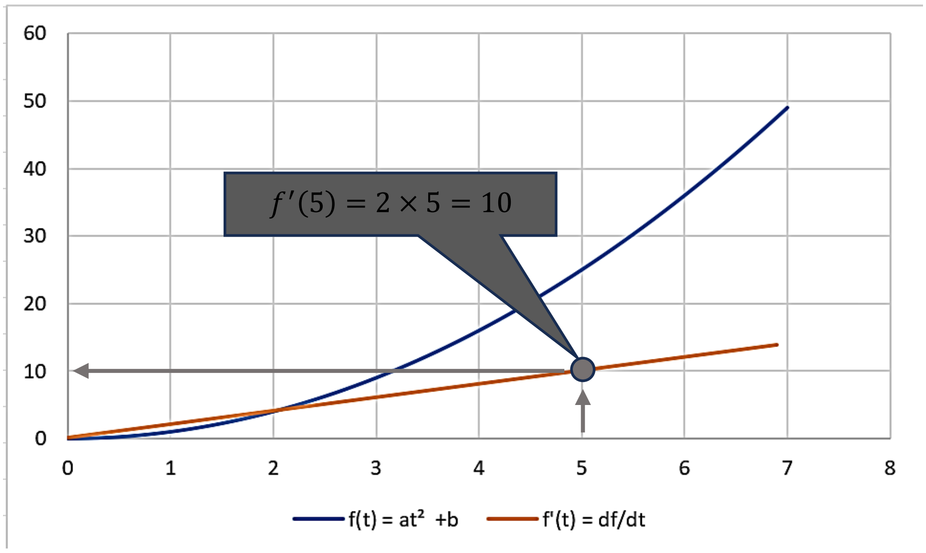
Avec ici $a = 1$ et $b = 0$, l'expression de f est $f(t) = 1 \times t^2 + 0 = t^2$

⇨ Sélectionner les colonnes A, B et C et insérer le nuage de points ci-contre :

On constate que la courbe de $f'(t)$ est ici **une droite**. En regardant de plus près les valeurs, on constate qu'en arrondissant, on a :

$$f'(t) = \frac{df}{dt}(t) = 2\,t$$

(arrondissant car ici $dt = 0{,}1$ et n'est donc pas infiniment petit).



⇨ Modifier la valeur de a de la cellule D3 en prenant par exemple $a = 5$ et observer ce que cela entraîne comme modification sur les 2 courbes … ici $f(t) = 5 \times t^2 + 0 = 5\ t^2$ et la courbe de $f'(t)$ est toujours une droite. En regardant de plus près les valeurs, on constate qu'en arrondissant, on a :

$$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = 10\ t$$

⇨ Modifier de même les valeurs de a sur la cellule D3 et de b, sur la cellule D6, en prenant successivement celles du tableau ci-dessous. Observer ce que cela entraîne comme modification sur les courbes. Compléter le tableau ci-dessous, en donnant la relation exprimant $f'(t)$:

a	b	$f(t) = at^2 + b$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t)$
1	**0**	$f(t) = t^2$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = 2\ t$
5	**0**	$f(t) = 5\ t^2$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = 10\ t$
5	**100**		
-5	**100**		
-5	**0**		

⇨ Conclure en donnant la relation qui permet de trouver directement $f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t)$:

Si $f(t) = a\ t^2 + b$ alors $f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) \;=$

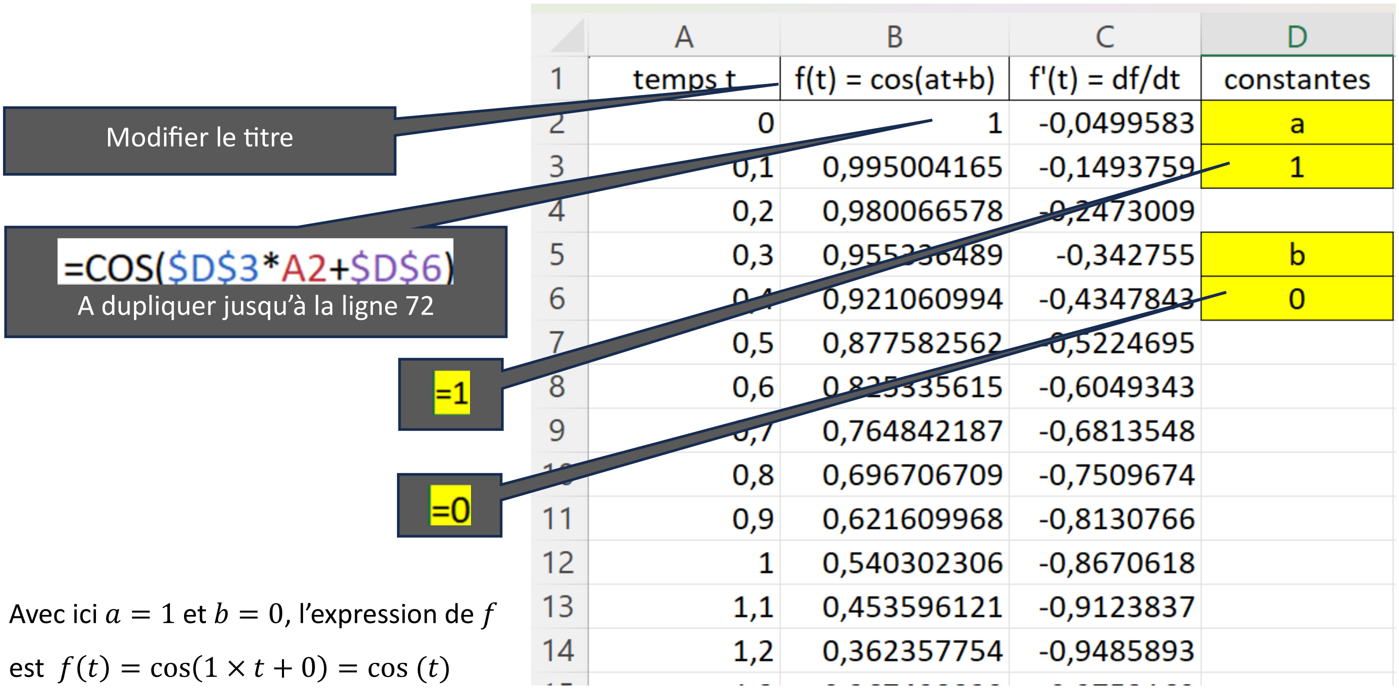
4- QUATRIEME EXEMPLE : DERIVEE DES FONCTIONS DU TYPE : $f(t) = \cos\,(a\ t + b)$

L'objectif est ici de refaire la même chose mais ici avec des fonctions du type $f(t) = \cos\,(a\ t + b)$

⇨ Ouvrir une 4ième feuille. La renommer tesla | fctsAffines | at²+b | cos(at+b)

⇨ Copier-coller les colonnes A, B et C de la feuille at²+b, dans cette nouvelle feuille cos(at+b)

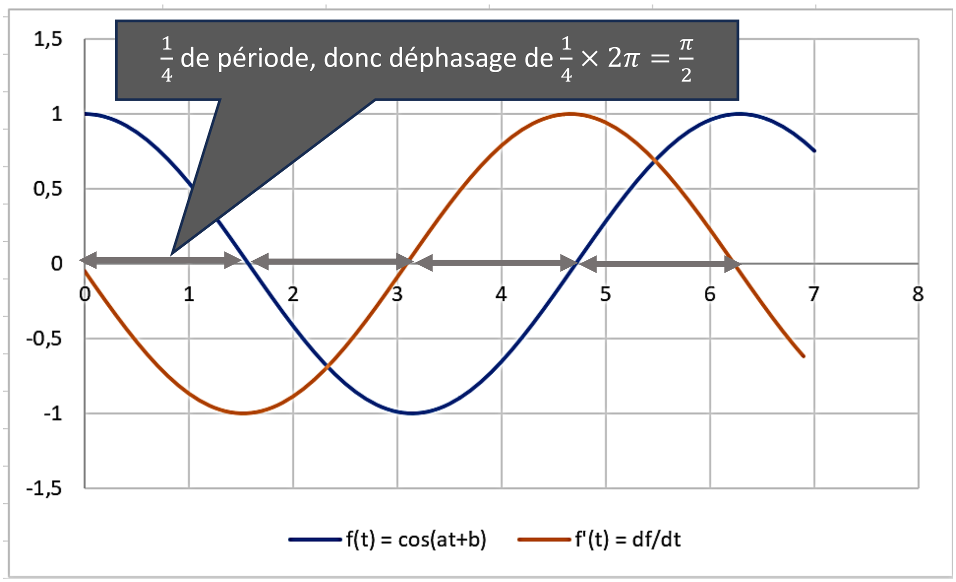
➩ Modifier les éléments suivants afin d'avoir dans la colonne B, une fonction du type $f(t) = \cos\,(at + b)$.



	A	B	C	D
1	temps t	f(t) = cos(at+b)	f'(t) = df/dt	constantes
2	0	1	-0,0499583	a
3	0,1	0,995004165	-0,1493759	1
4	0,2	0,980066578	-0,2473009	
5	0,3	0,955336489	-0,342755	b
6	0,4	0,921060994	-0,4347843	0
7	0,5	0,877582562	-0,5224695	
8	0,6	0,825335615	-0,6049343	
9	0,7	0,764842187	-0,6813548	
10	0,8	0,696706709	-0,7509674	
11	0,9	0,621609968	-0,8130766	
12	1	0,540302306	-0,8670618	
13	1,1	0,453596121	-0,9123837	
14	1,2	0,362357754	-0,9485893	

Avec ici $a = 1$ et $b = 0$, l'expression de f est $f(t) = \cos(1 \times t + 0) = \cos\,(t)$

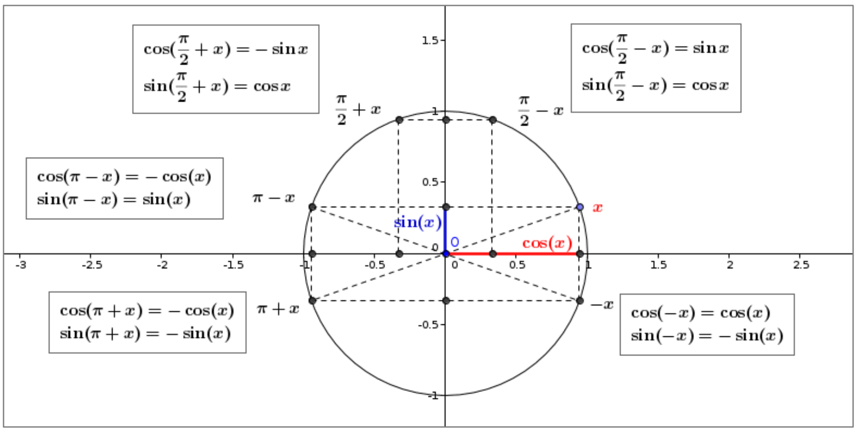
➩ Sélectionner les 3 colonnes A, B et C et insérer le nuage de points ci-contre :



On constate que la courbe de $f'(t)$ est une sinusoïde de même période, donc même pulsation ω et même amplitude que celle de $f(t)$, mais avec une **avance** de phase d'un quart de période.

On a donc : $f'(t) = \frac{df}{dt}(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$

En raisonnant sur le cercle trigonométrique, on avait vu dans le chapitre de trigonométrie, les relations ci-contre et notamment celles-ci-dessous :



$$\boxed{\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x\end{aligned}}$$

On peut donc en conclure que : $f'(t) = \frac{df}{dt}(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\,(t)$

⇨ Modifier la valeur de a de la cellule D3 en prenant par exemple $a = 2$ et observer ce que cela entraîne comme modification sur les 2 courbes … ici $f(t) = \cos(2 \times t + 0) = \cos(2t)$, la courbe de $f'(t)$ est toujours une sinusoïde de même pulsation que celle de f, toujours en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à f, mais par contre ici, d'amplitude 2 fois plus importante que celle de f. On en déduit que :

$$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = -2\,sin(2t)$$

⇨ Modifier de même les valeurs de a sur la cellule D3 et de b, sur la cellule D6, en prenant successivement celles du tableau ci-dessous. Observer ce que cela entraîne comme modification sur les courbes et compléter le tableau ci-dessous, en donnant la relation exprimant $f'(t)$:

a	b	$f(t) = \cos(a\,t + b)$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t)$
1	**0**	$f(t) = \cos(t)$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = -sin\,(t)$
2	**0**	$f(t) = \cos(2\,t)$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = -2\,sin\,(2\,t)$
3	**0**		
1	**0,5**		
1	**-0,5**		
3	**0,5**		

⇨ Conclure en donnant la relation qui permet de trouver directement $f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t)$:

Si $f(t) = \cos(a\,t + b)$ alors $f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) \;=$

5- CINQUIEME EXEMPLE : DERIVEE DES FONCTIONS DU TYPE : $f(t) = \mathrm{SIN}\,(a\,t + b)$

L'objectif est ici de refaire la même chose qu'avant mais avec des fonctions du type $f(t) = \sin(a\,t + b)$

⇨ Ouvrir une 5ième feuille. La renommer tesla | fctsAffines | at²+b | cos(at+b) | sin(at+b)

⇨ Copier-coller les colonnes A, B et C de la feuille cos(at+b), dans cette nouvelle feuille sin(at+b)

⇨ Modifier les éléments suivants afin d'avoir dans la colonne B, une fonction du type $f(t) = \sin{(at + b)}$.

Modifier le titre

=SIN(D3*A2+D6)
A dupliquer jusqu'à la ligne 72

=1

=0

	A	B	C	D
1	temps t	f(t) = sin(at+b)	f'(t) = df/dt	constantes
2	0	0	0,99833417	a
3	0,1	0,099833417	0,98835914	1
4	0,2	0,198669331	0,96850876	
5	0,3	0,295520207	0,93898136	b
6	0,4	0,389418342	0,90007196	0
7	0,5	0,479425539	0,85216935	
8	0,6	0,564642473	0,79575214	
9	0,7	0,644217687	0,73138404	
10	0,8	0,717356091	0,65970819	
11	0,9	0,78332691	0,58144075	
12	1	0,841470985	0,49736375	
13	1,1	0,89120736	0,40831726	
14	1,2	0,932039086	0,31519099	
15	1,3	0,963558185	0,21891545	
16	1,4	0,98544973	0,12045257	
17	1,5	0,997494987	0,02078616	
18	1,6	0,999573603	-0,0790879	

⇨ Modifier les valeurs de a sur la cellule D3 et de b, sur la cellule D6, en prenant successivement celles du tableau ci-dessous. Observer ce que cela entraîne comme modification sur les courbes et compléter le tableau ci-dessous, en donnant la relation exprimant $f'(t)$:

a	b	$f(t) = \sin{(a\,t + b)}$	$f'(t) = \frac{df}{dt}(t)$
1	**0**	$f(t) = \sin{(t)}$	$f'(t) = \frac{df}{dt}(t) =$
2	**0**	$f(t) = \sin{(2\,t)}$	$f'(t) = \frac{df}{dt}(t) =$
3	**0**		
1	**0,5**		
1	**-0,5**		
3	**0,5**		

⇨ Conclure en donnant la relation qui permet de trouver directement $f'(t) = \frac{df}{dt}(t)$:

Si $f(t) = \sin(a\,t + b)$ alors $f'(t) = \frac{df}{dt}(t) =$

6- Sixieme exemple : Derivee des fonctions du type : $f(t) = a\,t^2 + b\,t + c$

L'objectif est ici de refaire la même chose qu'avant, mais ici avec des fonctions du type $f(t) = a\,t^2 + bt + c$, a b et c étant des nombres quelconques.

⇨ Ouvrir une 6ième feuille. La renommer | tesla | fctsAffines | at²+b | cos(at+b) | sin(at+b) | **at²+bt+c**

⇨ Copier-coller les colonnes A, B, C et D de la feuille **fctsAffines**, dans cette nouvelle feuille **at²+bt+c**.

⇨ Modifier les éléments suivants afin d'avoir à présent dans la colonne B, une fonction $f(t) = at^2 + bt + c$.

	A	B	C	D
1	temps t	f(t) = at²+bt+c	f'(t) = df/dt	constantes
2	0	0	0,1	a
3	0,1	0,01	0,3	1
4	0,2	0,04	0,5	
5	0,3	0,09	0,7	b
6	0,4	0,16	0,9	0
7	0,5	0,25	1,1	
8	0,6	0,36	1,3	c
9	0,7	0,49	1,5	0
10	0,8	0,64	1,7	
11	0,9	0,81	1,9	
12	1	1	2,1	

Modifier le titre

=\$D\$3*A2*A2+\$D\$6*A2+\$D\$9
A dupliquer jusqu'à la ligne 72

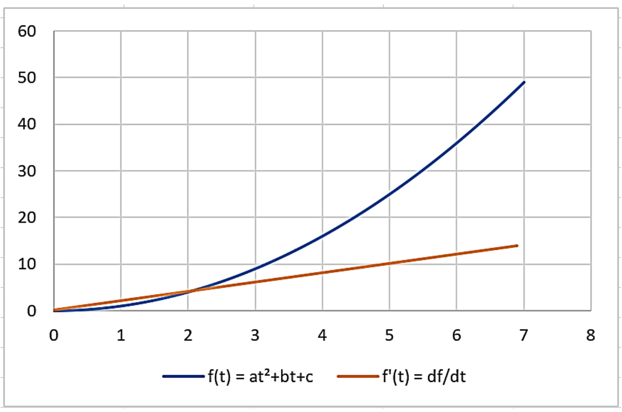
=1

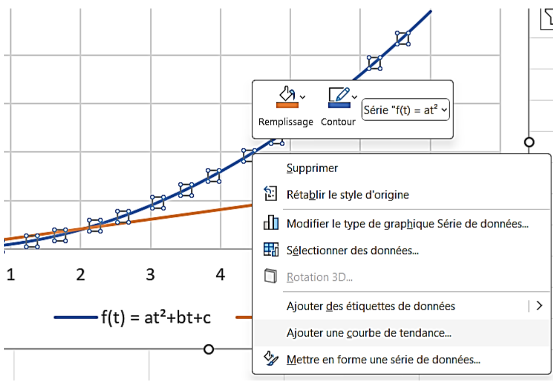
=0

=0

Avec ici $a = 1$ et $b = 0$, l'expression de f est $f(t) = 1 \times t^2 + 0 \times t + 0 = t^2$

⇨ Sélectionner les colonnes A, B et C et insérer le nuage de points ci-contre :



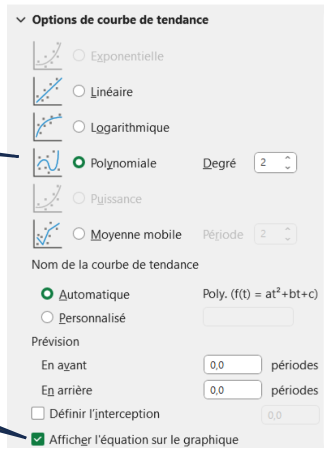


⇨ Sélectionner la courbe bleue $f(t)$ avec click gauche et ensuite avec un click droit, faire apparaître le menu ci-contre et choisir « *Ajouter une courbe tendance* » .

Dans le menu qui s'affiche :

Choisir l'option « *Polynomiale de Degré 2* »

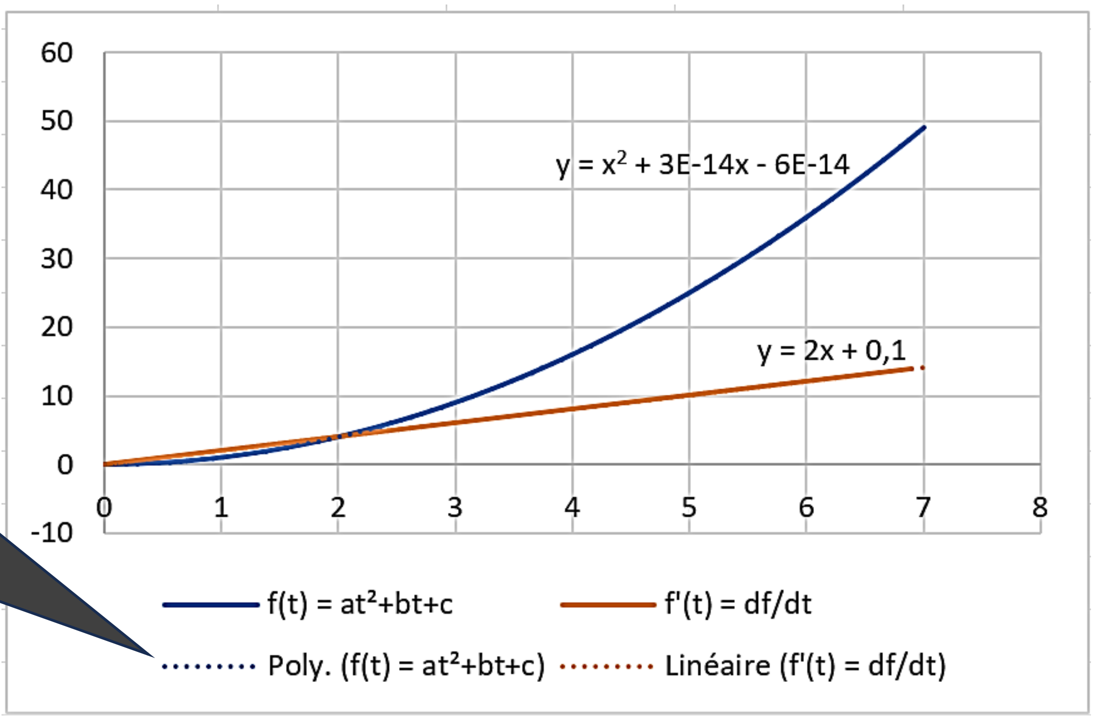
Choisir l'option « *Afficher l'équation sur le graphique* »



⇨ Ajouter de même une courbe tendance de la courbe orange $f'(t)$. Par contre ici, cette courbe étant une droite, on demande une courbe tendance linéaire.

.....

normalement vous obtenez :



Les 2 courbes tendances en pointillés, ne se voient pas, car elles se confondent précisément avec les courbes de $f(t)$ ou $f'(t)$

On a donc ici, avec $f(t) = t^2$, $f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = 2\,t + 0{,}1 \approx 2\,t$

(on arrondit car ici $dt = 0{,}1$ et n'est donc pas infiniment petit. Si cela avait été le cas on aurait $f'(t) \;= 2\,t$).

⇨ Modifier les valeurs de a, b, c dans les cellules D3, D6, D9 en prenant par exemple $a = 0{,}1$; $b = -2$; $c = 1$ et observer ce que cela entraîne comme modification sur les 2 courbes … ici $f(t) = 0{,}1\,t^2 - 2t + 1$ et la courbe de $f'(t)$ est toujours une droite. En regardant de plus près les valeurs, on constate qu'en arrondissant, on a :

$$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = 0{,}2\,t - 2$$

⇨ Modifier de même les valeurs de a sur la cellule D3, de b sur la cellule D6 et de c sur la cellule D9 en prenant successivement celles du tableau ci-dessous. Observer ce que cela entraîne comme modification sur les courbes. Compléter le tableau ci-dessous, en donnant la relation exprimant $f'(t)$:

a	c	b	$f(t) = at^2 + bt + c$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t)$
1	**0**	**0**	$f(t) = t^2$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = 2\,t$
0,1	**-2**	**1**	$f(t) = 0{,}1\,t^2 - 2t + 1$	$f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) = 0{,}2\,t - 2$
-0,1	**10**	**2024**		

-1	**15**	**-500**		
2	**45**	**25**		

⇨ Conclure en donnant la relation qui permet de trouver directement $f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t)$:

Si $f(t) = a\,t^2 + b\,t + c$ alors $f'(t) \;=\; \frac{df}{dt}(t) \;=$