# Chapitre 9 - Intégration

Le concept d'intégrale a été introduit au 17ième siècle par *Leibnitz* (1646 – 1716) et *Newton* (1642 – 1727). Il est une des branches du calcul infinitésimal. Le symbole mathématique représentant l'intégration est le S « long » $\int$. Il est appelé symbole de somme infini et a été introduit par Leibnitz.

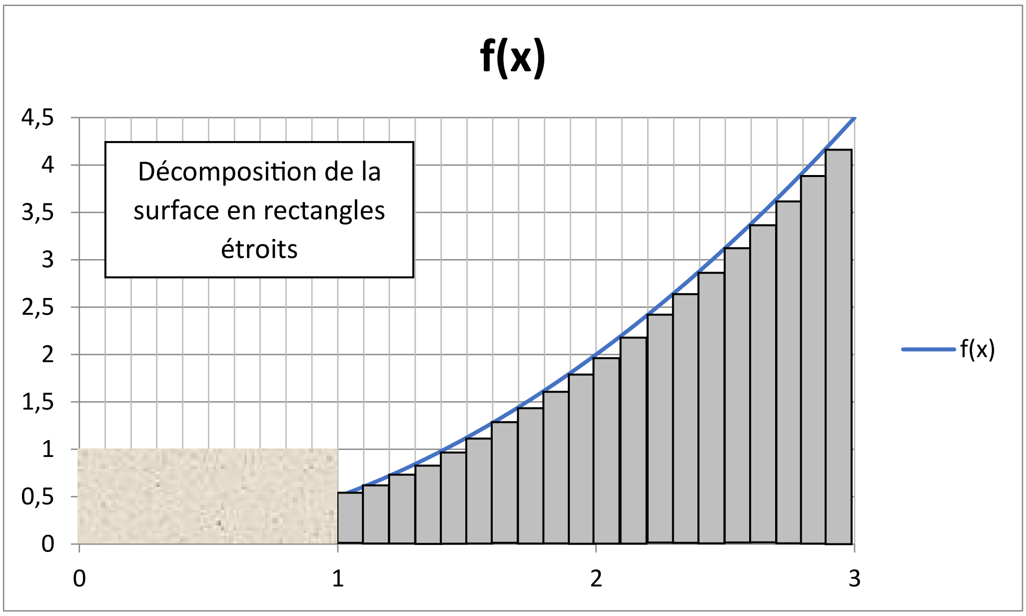
## 1- Calcul integral pour determiner des aires :

On introduit généralement le calcul intégral, en l'utilisant pour calculer l'aire d'un domaine, situé entre une courbe représentative d'une fonction $f$ positive et l'axe des abscisses.

On prend ci-contre l'exemple de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{2}$

Sa courbe représentative $C_f$ est donnée ici pour $x \in [1\,;3]$ .

On définit le domaine $D$ situé entre $C_f$ et l'axe des abscisses.




Le calcul intégral permet de calculer l'aire de ce domaine en le décomposant en une infinité de rectangles de largeur $dx$ infiniment petite. Parmi ces rectangles, celui qui se trouve sur une abscisse $x$ , a une hauteur $f(x)$ et une largeur $dx$. Son aire est ainsi égale au produit de sa hauteur par sa largeur, soit à $f(x) \times dx$ .

En additionnant l'aire de chacun de ces rectangles, on obtient l'aire exacte du domaine. On note cette somme infinie :

$$\int_1^3 f(x)\,dx$$

Pour calculer concrètement cette somme on utilise un algorithme similaire à celui donné ci-contre, en langage Python :

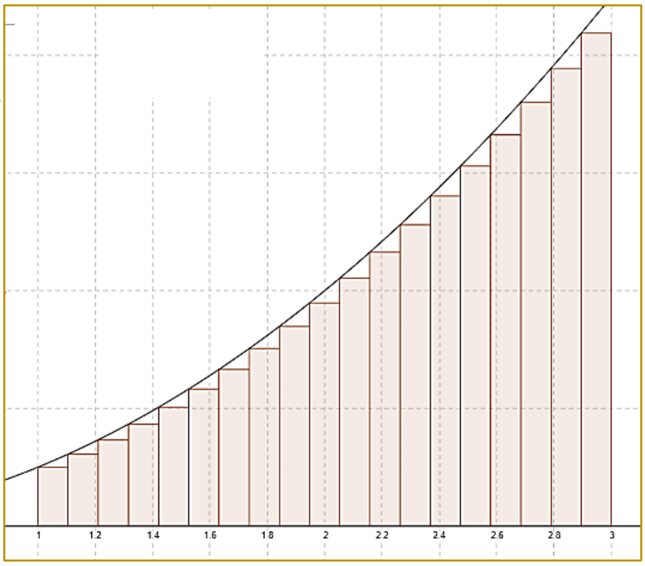
```python
def f(x):
    return x**2 / 2

def integrale(a,b,dx):
    x = a
    somme = 0
    while x < b :
        somme = somme + f(x)*dx
        x = x + dx
    return somme
```

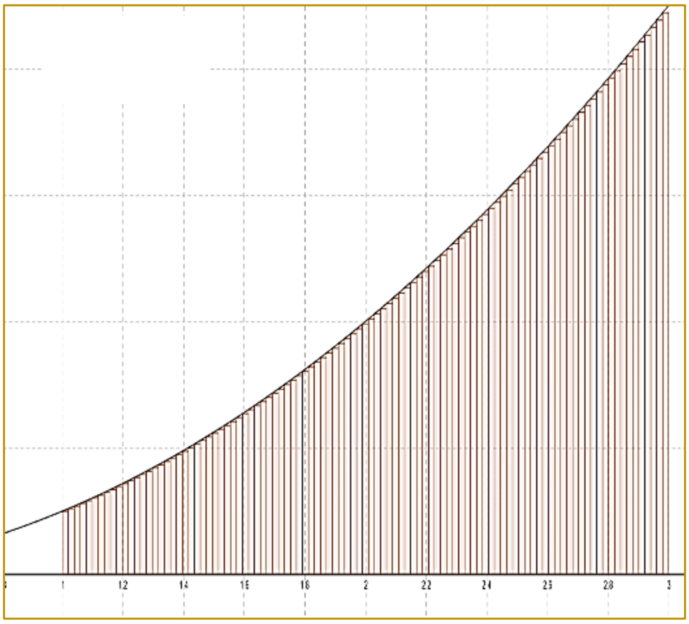
En exécutant cette fonction *integrale()* dans la console, on trouve les résultats suivants :

- Pour une largeur de rectangle $dx = 0{,}1$ , le domaine est décomposé en 20 rectangles :
  La fonction *integrale()* retourne la valeur suivante :

```
>>> integrale(1,3,0.1)
4.135000000000004
```



:

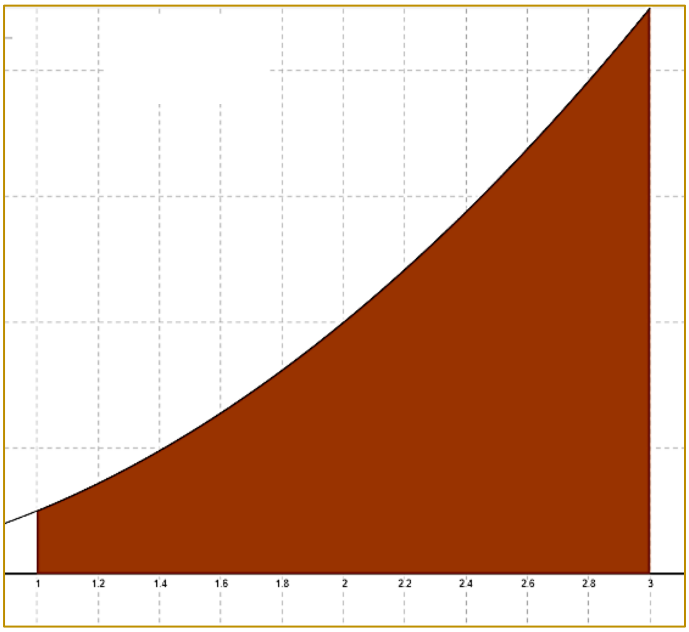


- Pour une largeur de rectangle $dx = 0{,}01$ , le domaine est décomposé en 200 rectangles.
  La fonction *integrale()* retourne la valeur suivante :

```
>>> integrale(1,3,0.01)
4.358349999999976
```

- Pour une largeur de rectangle $dx = 0{,}000001$ , le domaine est décomposé en 2 000 000 de rectangles :
  La fonction *integrale()* retourne la valeur suivante :

```
>>> integrale(1,3,0.000001)
4.333331333245594
```

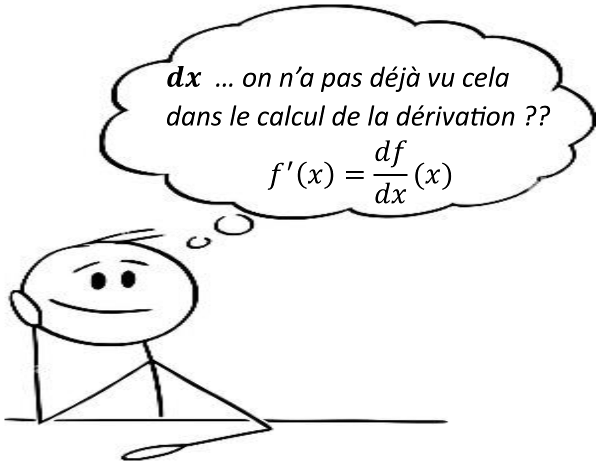


Conclusion : En exécutant l'algorithme précédent avec une largeur $dx$ très petite, on trouve que l'aire du domaine est égale à : $\int_1^3 f(x)\,dx \approx 4{,}33333$ .

Le nombre $\int_1^3 f(x)\,dx$ est appelée

Bien que la largeur $dx$ soit déjà extrêmement petite dans cet exemple, la valeur du nombre $\int_1^3 f(x)\,dx$ , retourné par notre code python, reste une valeur approchée. Pour être qualifiée d'exacte, la largeur $dx$ devrait être infiniment petite.

## 2- <u>VALEUR EXACTE D'UNE INTEGRALE :</u>




Pour obtenir une valeur exacte de l'intégrale $\int_1^3 f(x)\,dx$ , il est nécessaire d'utiliser une largeur $dx$ infiniment petite.

Une variation $dx$ infiniment petite est déjà utilisée lorsque l'on dérive une fonction. Les mathématiciens ont ainsi eu l'idée de définir une fonction notée $F$ tel que :

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} = f(x)$$

En remplaçant $f(x)$ par $\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx}$ dans le calcul de l'intégrale $\int_1^3 f(x)\,dx$ , on obtient alors :

$$\int_1^3 f(x)\,dx \quad = \quad \int_1^3 \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx}\,dx$$

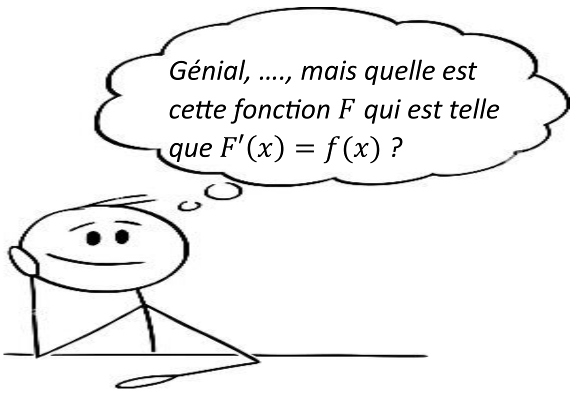
$$\int_1^3 f(x)\,dx \quad = \quad \int_1^3 F(x+dx) - F(x)$$

Cela donne alors :

$$\int_1^3 f(x)\,dx \; = \; [\; F(1+dx) - F(1)\,] + [\; F(1+2dx) - F(1+dx)\,] + \cdots . + [\; F(3-dx) - F(3-2dx)\,] + [\; F(3) - F(3-dx)\,]$$

Dans cette somme, la plupart des termes s'annulent. Il ne reste que le premier et le dernier, ce qui fait :

$$\int_1^3 f(x)\,dx \quad =$$




Il est assez facile de trouver une fonction $F$ qui permet d'avoir $F'(x) = f(x)$ …. Il suffit de faire de la dérivation … mais à l'envers. On peut procéder par essais :

- Si $F(x) = x^3$ , on aurait $F'(x) = 3\,x^2$ ,
- Si $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ , on aurait $F'(x) = \frac{1}{3} \times 3\,x^2 = x^2$
- Si $F(x) = \frac{1}{6}x^3$ , on aurait $F'(x) = \frac{1}{6} \times 3\,x^2 = \frac{1}{2}\,x^2 = f(x)$

Voilà le tour est joué, on a trouvé une fonction $F(x) = \frac{1}{6}x^3$ qui est telle que $F'(x) = f(x)$ . On peut donc finalement dire que :

$$\int_1^3 f(x)\,dx \quad = \quad F(3) - F(1) \; = \; \frac{1}{6}3^3 \; - \; \frac{1}{6}1^3 \; = \; \frac{27}{6} - \frac{1}{6} \; = \; \frac{26}{6} \; = \; \frac{13}{3} \quad \approx 4{,}33333333$$

La valeur exacte de l'intégrale est donc : $\int_1^3 f(x)\,dx \; = \; \frac{13}{3}$

## 3- PRIMITIVES : DEFINITION ET PROPRIETES

Définition d'une fonction primitive :

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$. Une fonction $F$ est une PRIMITIVE de $f$ sur cet intervalle $I$ lorsqu'elle est dérivable sur $I$ et que sa dérivée $F'$ est égale à $f$

*Exemples* :

| Primitive de $\boldsymbol{f(x) = x^3}$ | Primitive de $\boldsymbol{f(x) = 3x^2}$ | Primitive de $\boldsymbol{f(x) = 5x}$ |
|---|---|---|
| $F(x) = \frac{1}{4}x^4$<br>$F$ est une primitive de $f$ car :<br>$F'(x) = \frac{1}{4} \times 4\,x^3 = x^3 = f(x)$ | | |

| Primitive de $\boldsymbol{f(x) = 2024}$ | Primitive de $\boldsymbol{f(x) = 6\,x^2}$ | Primitive de $\boldsymbol{f(x) = 5\,x^2}$ |
|---|---|---|
| | | |

Primitive d'une fonction polynôme :

Soit $n$ en entier naturel et soit $f$ une fonction définie par $f(x) = x^n$ . Les fonctions primitives $F$ de $f$ ont comme expression : $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$

$K$ étant un nombre réel constant quelconque.

Propriété :

Pour toute constante $K$, si $F$ une primitive de $f$ alors $F + K$ est aussi une primitive de f.

| Primitive de $\boldsymbol{f(x) = 3x^2}$ qui respecte $F(2) = 6$ | Primitive de $\boldsymbol{f(x) = 2024}$ qui respecte $F(0) = 6$ |
|---|---|
| | |

## 4- INTEGRAL : THEOREME FONDAMENTAL

Théorème :

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$. Soit $F$ une primitive de $f$ sur cet intervalle $I$ . Soit 2 nombres $a$ et $b$ compris dans cet intervalle $I$ .

$$\int_a^b f(x)\ .dx \quad = \quad F(b) - F(a)$$

On a inventé une nouvelle écriture pour $F(b) - F(a) = [\ F(x)]_b^a$

Le théorème peut ainsi s'écrire :

$$\int_a^b f(x)\ .dx \quad = \quad [\ F(x)\ ]_b^a$$

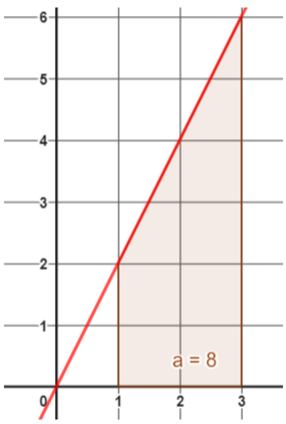
*Exemples* :

| $\boldsymbol{A = \int_{-1}^{2} 3\ x^2 . dx}$ | $\boldsymbol{B = \int_{0}^{2} 6\ x\ .\ dx}$ | $\boldsymbol{C = \int_{0}^{2} 2024\ .\ dx}$ |
|---|---|---|
| $f(x) = 3\ x^2$<br>Primitive de $f$ : $F(x) = x^3$<br>$A = F(2) - F(-1)$<br>$= 2^3 - (-1)^3$<br>$= 8 - (-1)$<br>$= 9$<br>On a donc :<br>$A = \int_{-1}^{2} 3\ x^2\ dx = 9$ | | |

## 5- INTEGRAL : PROPRIETES

### a. UNITE D'AIRES :

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ . Le nombre $\int_1^3 2\ x\ dx$ est égal à l'aire du domaine compris entre la droite représentative de cette fonction et l'axe des abscisses. On a :

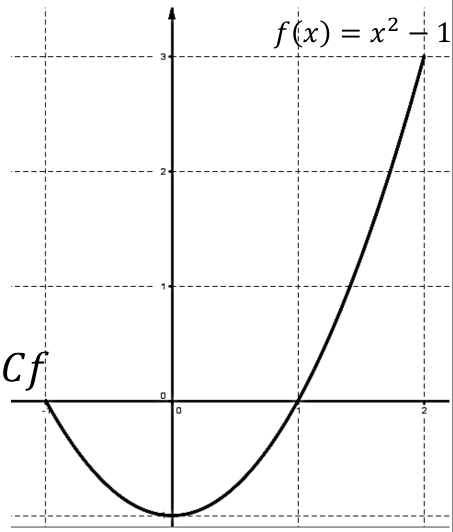
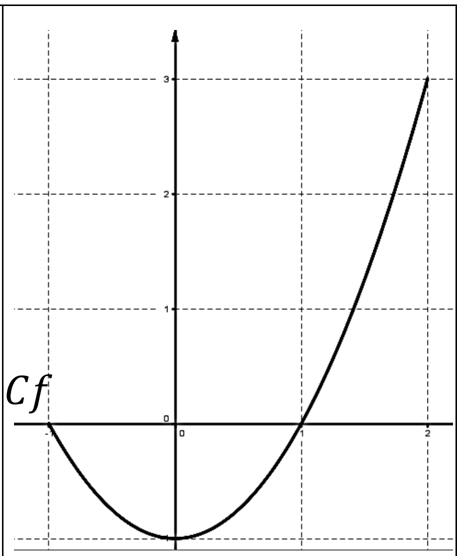
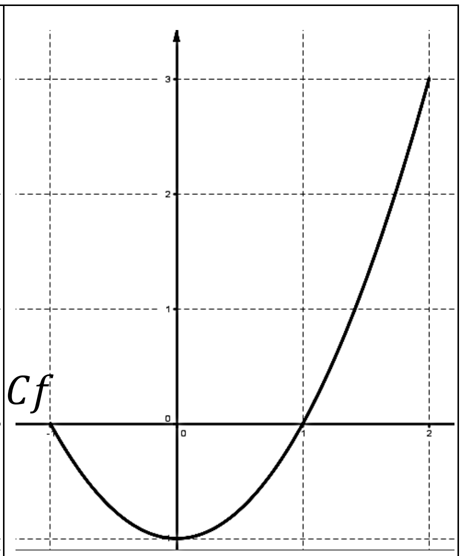



$$\int_1^3 2\ x\ dx \quad = \quad [\ x^2]_1^3 \quad = \quad 3^2 - 1^2 \quad = \quad 9 - 1 = 8$$

On dit que l'aire du domaine est de 8 unités d'aires. On note 8 u.a.

## b. SIGNE D'UNE INTEGRALE :

*Exemple* : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$ . Une fonction primitive est :

| | | |
|---|---|---|
|   |   |   |
| $\int_{-1}^{1} f(x).dx$ | $\int_{1}^{2} f(x).dx$ | $\int_{-1}^{2} f(x).dx$ |

Définition :

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $[\, a \,;\, b \,]$.

- Si $f(x)$ est positif pour $x \in [\, a \,;\, b \,]$ alors $\int_a^b f(x).dx$ est positif
- Si $f(x)$ est négatif pour $x \in [\, a \,;\, b \,]$ alors $\int_a^b f(x).dx$ est négatif

## c. RELATION DE CHASLES :

Chasles :

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$. Soient 3 nombres $a$, $b$ et c appartenant à cet intervalle. On a :

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx$$

*Exemple* : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,x$ .

$$\int_0^2 2x.dx =$$

$$\int_0^{10} 2x.dx + \int_{10}^2 2x.dx =$$

On a bien :

$$\int_0^2 2x.dx = \int_0^{10} 2x.dx + \int_{10}^2 2x.dx$$

## d. PROPRIETES DE LINEARITE :

Linéarité :

Soit deux fonctions $f$ et g définies sur un intervalle $I$. Soit un nombre constant $k$ .

$$\int_a^b f(x) + g(x).dx = \int_a^b f(x).dx + \int_a^b g(x).dx$$

$$\int_a^b k\,f(x)\ dx = k \times \int_a^b f(x).dx$$

*Exemple* :

$$A = \int_{-1}^2 3\,x^2 + 2x\,.dx$$

## e. INVERSION DES BORNES :

Propriétés :

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$.

$$\int_a^b f(x)\ dx \quad = \ -\int_b^a f(x).dx$$

Exemple : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,x$ .

$$\int_0^2 2x.dx \ =$$

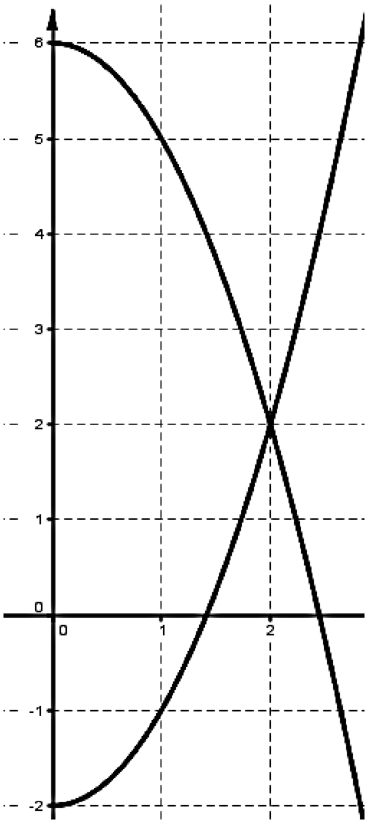
$$\int_2^0 2x.dx \ =$$

On a donc bien :

$$\int_0^2 2x.dx \ = - \int_0^2 2x.dx$$

## f. AIRE D'UN DOMAINE SITUE ENTRE 2 COURBES :

Exemple : Soit les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6 - x^2$ et $g(x) = x^2 - 3$ .




$$\int_0^2 (\,f(x) - g(x)\,).dx$$

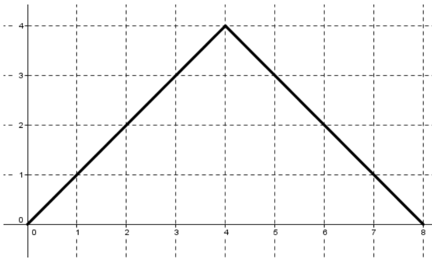
## 6- Valeur moyenne d'une fonction :

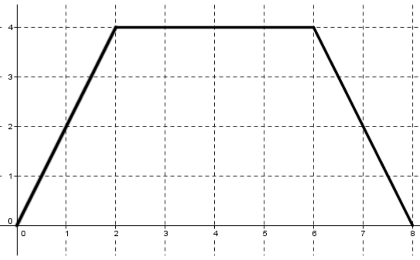
Définition :

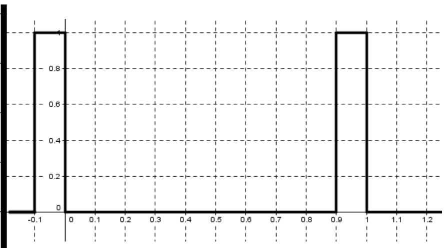
Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $[\, a\,;\; b\,]$. On appelle valeur moyenne de $f$ sur $[\, a\,;\; b\,]$, le nombre réel :

$$\frac{\int_a^b f(x)\,.\,dx}{(b-a)}$$

Exemples :







## 7- Integrale avec des coordonnees polaires :

### a. Calcul de l'aire d'un disque de rayon R :