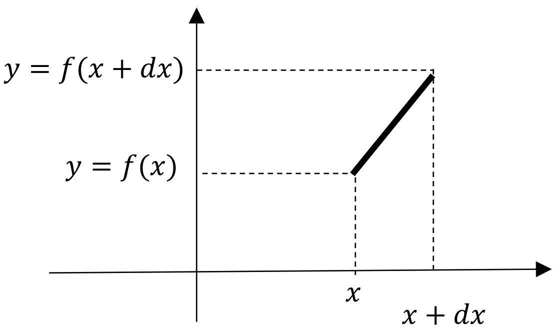
# Chapitre 11 - Fonctions exponentielles

## 1- FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE $e$ :

**Définition :**

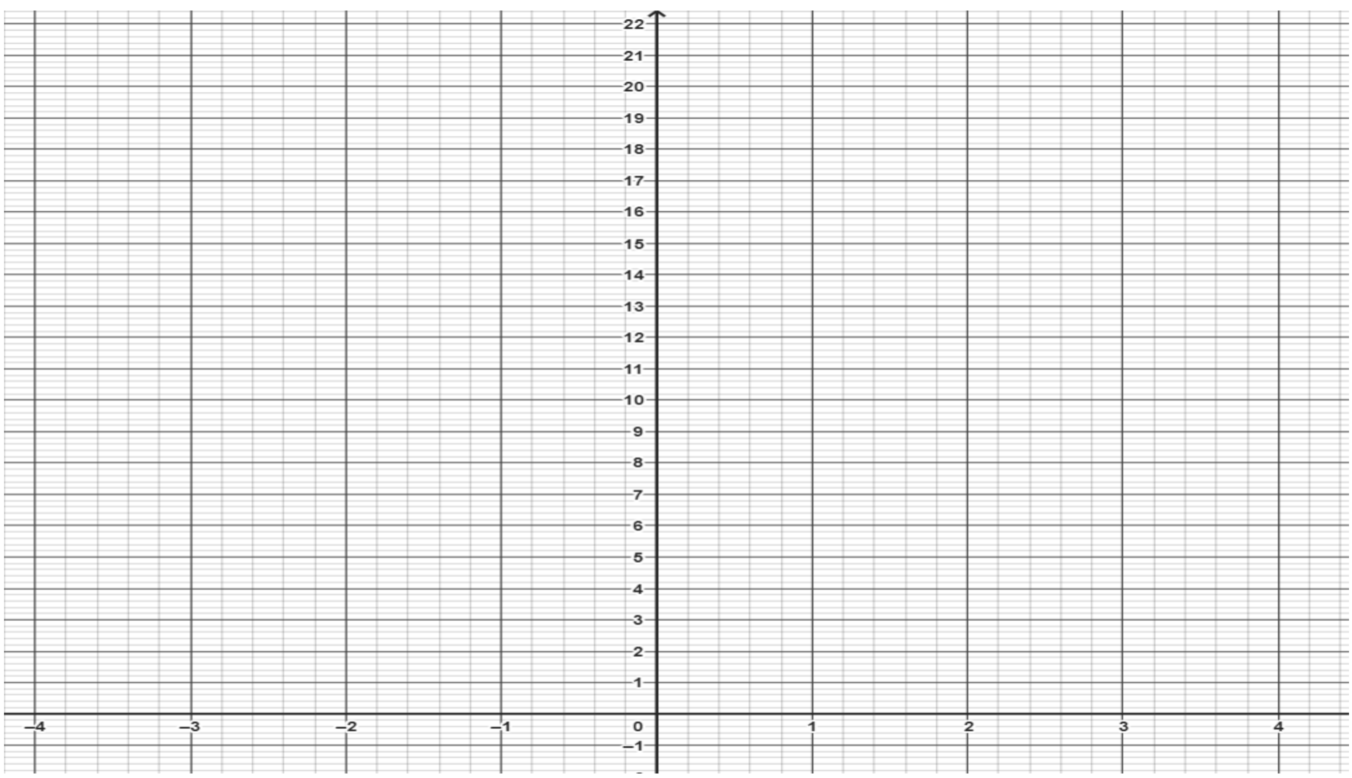
La fonction exponentielle de base $e$ est une fonction unique, dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que

Les images de cette fonction peuvent être définies numériquement par l'algorithme suivant :




```
def exp(X) :
    dx = 0.000001
    x = 0
    y = 1
    if X > 0 :
        while x < X :
            x = x + dx
            y = y + y*dx
    if X < 0 :
        while x > X :
            x = x - dx
            y = y - y*dx
    return y
```

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\exp(x) = e^x$ | | | | | | 2,71828 | | | |



Propriétés constatées :

On constate que pour 2 nombres $a$ et $b$ quelconques appartenant à $\mathbb{R}$, on a : $\exp(a+b) = \exp(x) \times \exp(b)$.
On constate aussi que $\exp(1) \approx 2{,}718281828$. Ainsi $\exp(1) = e$ , $e$ étant le nombre d'Euler tel que $\ln(e) = 1$.

La notation de cette fonction exponentielle a été modifiée pour que ces propriétés puissent se retrouver plus naturellement :

Notation :

La fonction exponentielle de base $e$ est définie pour tout nombre réel $x$.

Elle est notée $\exp(x) = e^x$

Caractéristiques principales de $e^x$ :

- Valeurs à connaître :
- Fonction dérivée :
- Signe de $e^x$ :
- Variations :
- Limites :

Propriétés fonctionnelles :

Si $a$ , $b$ et $n$ sont des nombres strictement positifs

-
-
-
-

Relation entre les fonctions $e^x$ et $\ln(x)$:

Les fonctions $e^x$ et $\ln(x)$ sont dites

Résolution d'équations et d'inéquations :

| **Résoudre l'équation $e^{-2x+1} = 2$** | **Résoudre l'inéquation $5 + 2e^{-x+1} < 7$** |
|---|---|
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |
| | |

## 2- FONCTIONS $e^u$ :

Propriété : Soit une fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$, soit la fonction $f$ définie par

$$f(x) = e^{u(x)}$$

La fonction dérivée de $f$ est définie par

Exemple :

| Dérivation de $f$ définie par $\boldsymbol{f(x) = e^{-5x}}$ | Dérivation de $f$ définie par $\boldsymbol{f(x) = e^{x^2}}$ |
|---|---|
| | |

## 3- Fonction exponentielle de base $a$ :

Définition :

Soit $a$ un nombre réel strictement positif. La fonction exponentielle de base $a$ est définie par :

Propriétés fonctionnelles : On a les mêmes propriétés fonctionnelles que celles de la fonction $e^x$ ……

## 4- Fonction puissance:

Définition : Soit $\alpha$ un nombre réel quelconque. La fonction puissance $\alpha$ est définie pour toute valeur strictement positive de $x$, par :

Propriétés : $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ et $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ et $(x^{\alpha})^{\beta} = x^{\alpha\,\beta}$ et ……

Résolution d'équations et d'inéquations :

| **Résoudre l'équation** $x^5 = 20$ | **Résoudre l'inéquation** $x^3 < 8\,000\,000\,000$ |
|---|---|
| | |

## 5- EXERCICES :

*Exercice1. :* Simplifier les nombres $A = e^{1-3\ln(2)}$ et $B = \frac{e^{2x-1}}{e^x}$

*Exercice2. :* Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $2\ln(3x) + 1 = 0$ | $4e^{2x} = 100$ | $4e^x - 5 \geq 0$ |

*Exercice3. :* Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $2\,e^{0.5x} < 4$ | $1 + 2^{x+1} > 65$ | $5\,x^3 = 225$ |

*Exercice4. :* Calculer la fonction dérivée de $f$ définie par :

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = 4\,e^{0{,}25\,x}$ | $f(x) = e^{-2x+1}$ | $f(x) = e^{-x}$ |

*Exercice5. :* Simplifier les expressions suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $A = \frac{3^{4{,}6}}{(3^{1{,}3})^2}$ | $B = (\frac{1}{3})^{-\frac{3}{5}} \times (\frac{1}{3})^{-\frac{2}{5}}$ | $C = \frac{a^{2{,}6} \times (b^{1{,}1})^3}{(a^{1{,}3}b^{0{,}1})^2}$ |

*Exercice6. :* Soit une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1{,}5^{\frac{t}{10}}$. Montrer que : $f(t+20) = 2{,}25\ f(t)$

*Exercice7. :*

La température $f$ en degrés Celsius (°C) du lubrifiant d'un moteur varie en fonction du temps $t$ de fonctionnement exprimé en heures. La fonction $f$ est définie pour tout nombre réel $t$ de l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 30 - 10e^{-0{,}1t}$.

**1.** Déterminer la température du lubrifiant :

**a)** à l'arrêt ;

**b)** au bout de vingt-quatre heures.

**2.** On s'intéresse au comportement de la fonction $f$ en $+\infty$.

**a)** Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

**b)** Donner une interprétation graphique du résultat obtenu.

**c)** Donner une signification concrète de ce résultat pour le lubrifiant.

**3.** On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$.

**a)** Calculer $f'(t)$ pour tout nombre réel $t$ appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$. **Etudier le signe de $f'(t)$.**

En déduire le sens de variation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

**b)** Construire la courbe représentative de la fonction $f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ dans un repère bien choisi.

**c)** À quel instant la température du lubrifiant est-elle de 28 °C ? Donner une valeur approchée à l'heure près.