Chapitre 10 - Fonctions Logarithmes

1- Fonctions logarithmes :

Définition :

Les fonctions logarithmes sont des fonctions f qui satisfont à la propriété suivante :

a et b étant des nombres positifs non nuls, quelconques.

Propriété : Pour toutes les fonctions logarithmes f, on a : $f(1) = 0$

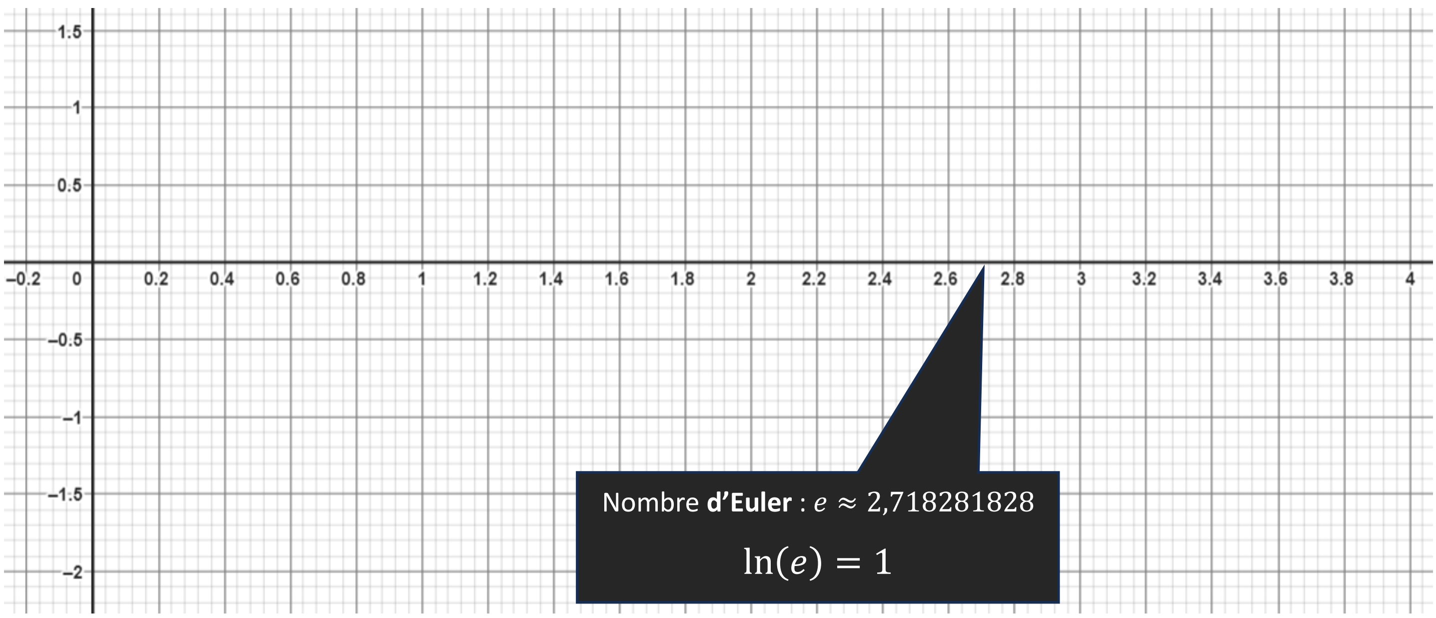
On voit ci-dessous les fonctions logarithmes qui sont le plus utilisées :

a. Logarithme neperien $\boldsymbol{ln}$:

Définition :

La fonction logarithme népérien est notée . Elle est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ et peut être calculée par calcul intégral :

x	0,125	0,25	0,5	1	2	$\mathbf{2,71828}$	4
$\ln(x)$							



Propriétés :

- $\ln(x)$ est négatif si $0 < x < 1$ et positif si $x > 1$
- dérivation : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Si a , b et n sont des nombres strictement positifs

-
-
-
-
-

Résolution d'une équation $q^x > a$: Par exemple, trouver la valeur de x qui permette d'avoir $10 \times 0{,}8^x < 3$

b. Logarithme decimal log :

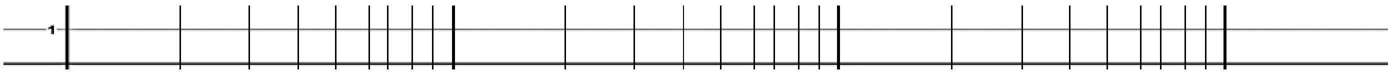
Définition :

La fonction logarithme décimal est notée . Elle est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ et peut être calculée par la relation :

Propriétés :

On a les mêmes propriétés que celles de la fonction ln, mais en remplaçant le nombre d'Euler e par 10 : $\log(10) = 1$; $\log(10^n) = n\log(10) = n$

Echelles logarithmiques :



c. Logarithme binaire log_2:

Définition :

La fonction logarithme binaire est notée . Elle est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ et peut être calculée par la relation :

Propriétés :

On a les mêmes propriétés que celles de la fonction ln, mais en remplaçant le nombre d'Euler e par 2 : $log_2(2) = 1$; $log_2(2^n) = n\ log_2(2) = n$

Résolution d'une équation $q^x > a$: Par exemple, trouver la valeur de x qui permette d'avoir $2^x < 1000000$

2- EXERCICES :

EXERCICE 1.: Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les nombres suivants :

a) $\ln(8)$; *b)* $\ln(8)+\ln(32)$; *c)* $\ln(64)-\ln(4)$; *d)* $\ln(16)-3\ln(2)$

EXERCICE 2.: Sans calculatrice, calculer :

a) $\ln(e^3)$; b) $\ln(\frac{1}{e})$; c) $\ln(\frac{1}{e^2})$

EXERCICE 3.: On donne $\ln(2) \approx 0{,}69$ et $\ln(5) \approx 1{,}61$. Sans calculatrice, en déduire les valeurs approchées de :

a) $\ln(10)$; b) $\ln(0{,}1)$; c) $\ln(0{,}2)$; d) $\ln(20)$

EXERCICE 4.: Exprimer en fonction de $\ln(2)$ le nombre $a = 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(8)$

EXERCICE 5.: 1- En remarquant que $\left(\sqrt{e}\right)^2 = e$, montrer que $\ln\left(\sqrt{e}\right) = 0{,}5$

2- Exprimer en fonction de $\ln(3)$ le nombre $a = \ln(9e) + \ln(3\sqrt{e})$

EXERCICE 6.: a et b sont deux nombres strictement positifs. Exprimer en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$ les nombres suivants :

a) $\ln(a^4)$; b) $\ln(a^{-3})$; $\ln(a^2b)$; d) $\ln(\frac{a^3}{b^2})$

EXERCICE 7.: Simplifier au maximum :

(a) $\mathbf{A} = ln(ab) + ln(\frac{a}{b}) - ln(a^2) + lne$

(c) $\mathbf{C} = ln(a+b) + ln(a-b) - ln(a^2-b^2)$

(b) $\mathbf{B} = ln(\frac{1}{a}) + ln(a^4) - ln(a^3) + ln1$

(d) $\mathbf{D} = ln(e^2) + 2ln(\sqrt{e}) - ln(\frac{1}{e}) + ln(\frac{2}{e}) + ln(\frac{e}{2}) - 4$

EXERCICE 8.: 100 € sur un compte de dépôt bancaire dont les intérêts sont à 2 % par an. Au bout de n années, il y a (100×1.02^n) d'€ sur le compte. Combien d'années faut-il pour que la somme sur le compte dépasse les 5000 € ?

EXERCICE 9.: Ecrire sous forme d'un seul logarithme

(a) $\mathbf{A} = 2ln3 - ln5$

(c) $\mathbf{C} = \frac{1}{2}ln4 - 3ln2$

(b) $\mathbf{B} = 3ln10 + ln0{,}08 - 5ln2$

(d) $\mathbf{D} = 2ln5 - 3ln2 + \frac{1}{2}ln100$

EXERCICE 10.:

10000 bactéries par ml de sang. Après administration d'un antibiotique, ce nombre baisse de 0.5 % par minute. Au bout de n minutes, il y a $(10000 \times (1 - \frac{0.5}{100})^n)$ de bactéries par ml de sang. Combien de minutes faut-il attendre pour que le nombre de bactéries par ml soit inférieur à 1 ?

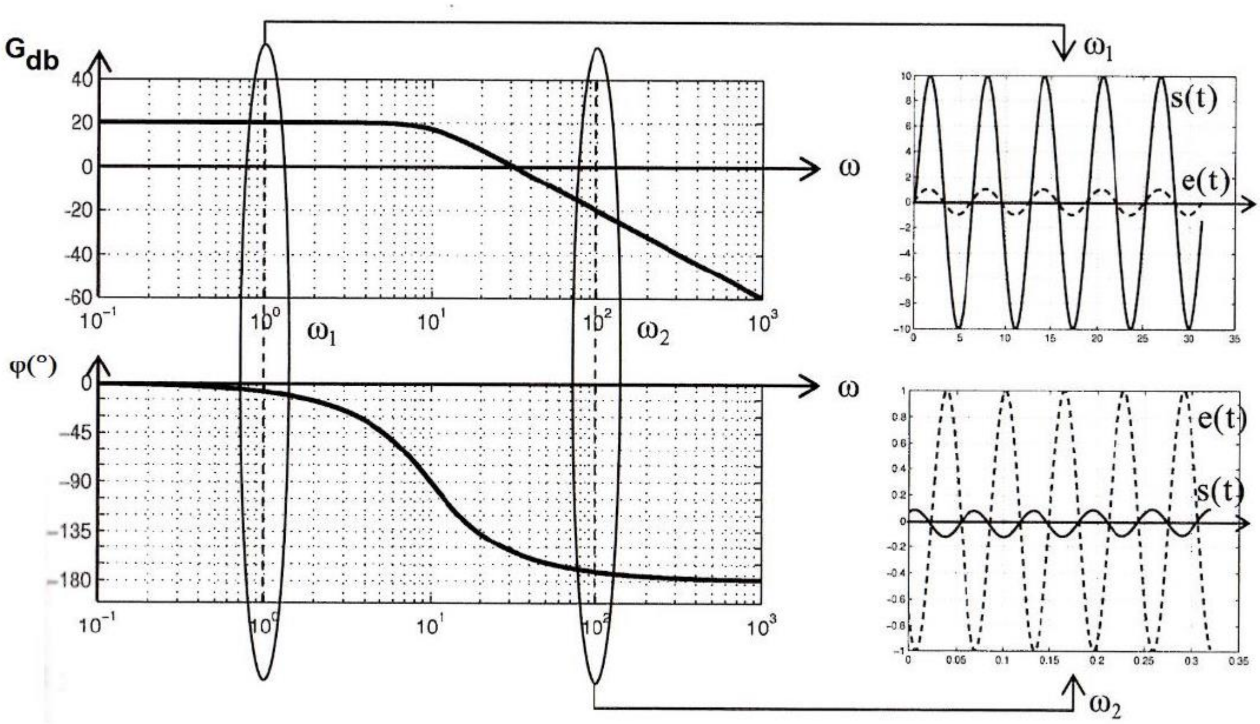
EXERCICE 11.:

Écrire sous la forme $\log(A)$, où A est un nombre réel que l'on précisera, les nombres suivants :

a. $\log(2)+\log(7)-\log(5)$
b. $\log(3)-2\log(5)$
c. $\log(3)+\log(7)$
d. $3\log(7)-7\log(3)$
e. $\log(12)-\log(4)+2\log(3)$

EXERCICE 12.: Résoudre l'inéquation $50 \times 0.8^{n} < 10$ avec $n \in \mathbb{R}$, en utilisant la fonction log. Donner la valeur de n arrondie au centième.

EXERCICE 13.: Diagramme de Bode



Soit les fonctions e et s , définies sur $\mathbb{R}$ par $e(t) = \mathrm{A}\sin(\omega\, t)$ et $s(t) = \mathrm{B}\sin(\omega\, t + \varphi)$.

On définit une fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(\omega) = \frac{B}{A} = 20\log\left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\ \omega)^2}}\right)$.

1- Exprimer $G(\omega)$ sous une forme du type : $20\log(a) - 20\log(b)$
2- Exprimer la limite $\lim\limits_{\omega\to+\infty} G(\omega)$ en fonction de K et τ
3- Que représente la droite asymptote définie par la phrase « *20 dB par décade* » ?