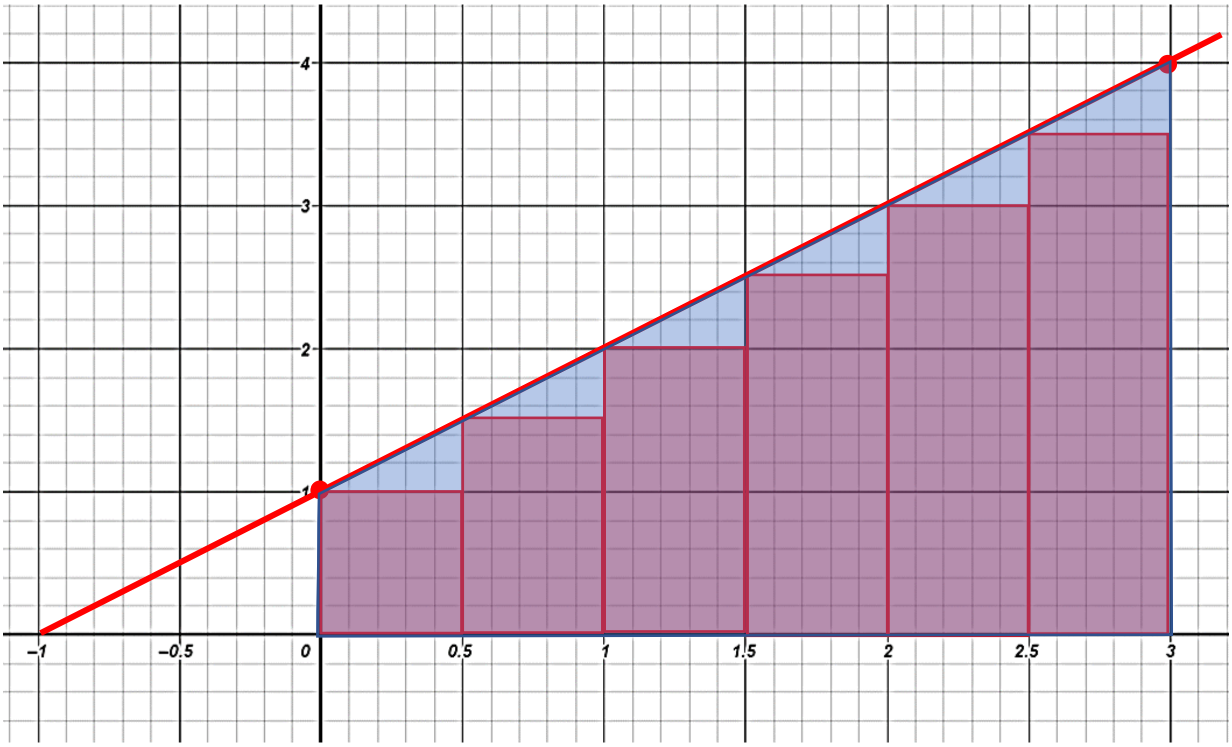
__Exercice 1.__ : *Calcul d'aire*

1- Tracer ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie pour $x \in [-1\,;3\,]$ par $f(x) = x + 1$



2- En décomposant l'aire du domaine entre la courbe et l'axe des abscisses en rectangles étroits de largeur $dx = 0{,}5$, calculer $\int_0^3 f(x)\ dx$. Tracer les rectangles sur le graphe ci-dessus.

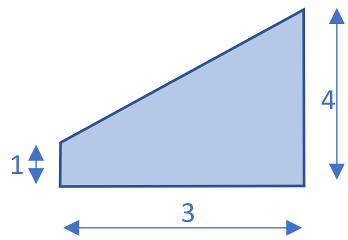
$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$ *en m*	***aire***
0	$0 + 1 = 1$	$0{,}5$
$0{,}5$	$0{,}5 + 1 = 1{,}5$	$0{,}75$
1	$1 + 1 = 2$	1

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$ *en m*	***aire***
$1{,}5$	$1{,}5 + 1 = 2{,}5$	$1{,}25$
2	$2 + 1 = 3$	$1{,}5$
$2{,}5$	$2{,}5 + 1 = 3{,}5$	$1{,}75$
	TOTAL	**6,75**

3- L'aire du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses correspond ici à l'aire d'un trapèze. Calculer cette aire. Retrouve-t-on un résultat proche de celui déterminé précédemment ?

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses correspond ici à l'aire du trapèze ci-contre. Exprimée en unités d'aire, elle est de :

$$\mathcal{A} = 1 \times 3 + \frac{3 \times 3}{2} = 3 + 4{,}5 = 7{,}5\ \ ua$$



On retrouve un résultat différent, mais relativement proche de celui déterminé dans la question précédente.

4- Calculer à présent l'intégrale $\int_0^3 f(x)\ dx$ en utilisant une primitive de f

La fonction F définie par $F(x) = \frac{x^2}{2} + x$ est une primitive de la fonction f car

$$F'(x) = \frac{1}{2} \times 2x + 1 = x + 1 = f(x)$$

On peut donc dire que :

$$\int_0^3 f(x)\ dx = \int_0^3 (x+1)\,.dx$$

$$= \left[\ \frac{x^2}{2} + x\ \right]_0^3$$

$$= \left(\ \frac{3^2}{2} + 3\right) - \left(\ \frac{0^2}{2} + 0\right)$$

$$= 4,5 + 3 - 0$$

$$= 7{,}5$$

<u>Exercice 2</u> **:** Calculer l'intégrale $\int_0^3 -x.dx$ en utilisant une primitive dans un premier temps. Vérifier le résultat en déterminant cette intégrale graphiquement

La fonction F définie par $F(x) = -\frac{x^2}{2} + 2023$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = -x$ car

$$F'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x + 0 = -x = f(x)$$

On peut donc dire que :

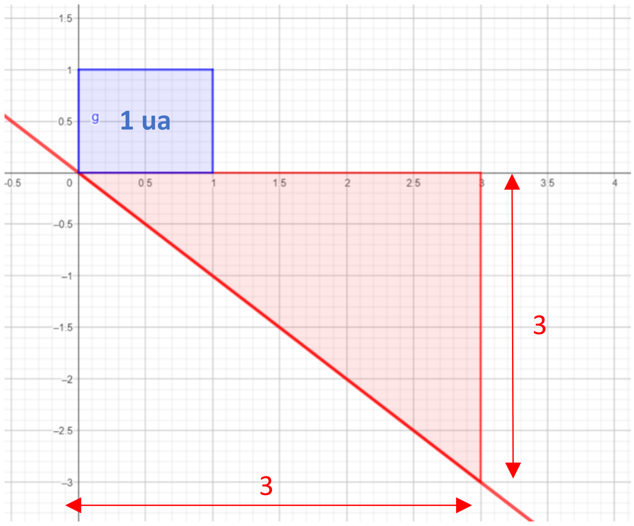
$$\int_0^3 f(x)\ dx = \int_0^3 -x\,.dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} + 2023\ \right]_0^3$$

$$= \left(-\frac{3^2}{2} + 2023\right) - \left(-\frac{0^2}{2} + 2023\right)$$

$$= -4,5 + 2023 - 2023$$

$$= -4{,}5$$



On peut retrouver la valeur de cette intégrale graphiquement en traçant la droite représentative de la fonction f définie par $f(x) = -x$. Pour $x \in [0\,;3]$, les valeurs de $f(x)$ sont négatives. Ainsi la valeur de $\int_0^3 -x.\,dx$ sera négative et correspondra ici à **l'opposé** de l'aire du domaine compris entre la droite et l'axe des abscisses, soit :

$$\int_0^3 -x.\,dx = -\frac{3 \times 3}{2} = -4{,}5$$

Exercice 3 **:** Calculer l'intégrale $\int_0^1 (x^2 - 1).\,dx$ en utilisant une primitive dans un premier temps. Vérifier le résultat en déterminant cette intégrale graphiquement

La fonction F définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$ car

$$F'(x) = \frac{1}{3} \times 3\,x^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$$

On peut donc dire que :

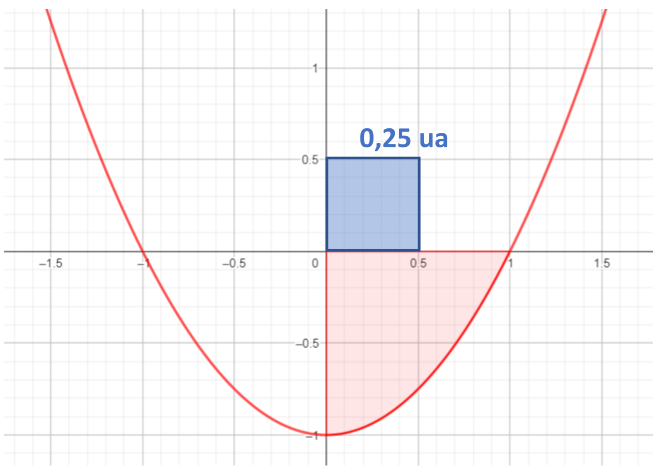
$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 x^2 - 1\,.\,dx$$

$$= \left[\ \frac{x^3}{3} - x\ \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{3} - 1$$

$$= -\frac{2}{3}$$



On peut retrouver la valeur de cette intégrale graphiquement en traçant la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 1$. Pour $x \in [0\,;1]$, les valeurs de $f(x)$ sont négatives. Ainsi la valeur de $\int_0^1 f(x).\,dx$ sera négative et correspondra ici à **l'opposé** de l'aire du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses. En repérant un domaine de 0,25 ua sur le même graphe, on peut en donner une valeur approchée :

$$\int_0^3 x^2 - 1.\,dx \approx -0{,}6$$