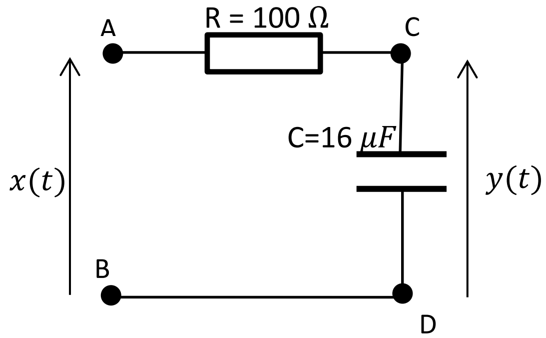
TD – Bts Sna2

EQUATIONS DIFFERENTIELLES D'ORDRE 1

On se propose d'étudier un filtre passe-bas de type RC d'un point de vue mathématique.

Une tension $x(t)$ est appliquée entre les points A et B, en entrée de filtre. Une tension $y(t)$ se retrouve entre les points D et C, en sortie de filtre.

Ce filtre est composé d'une résistance R de 100 Ω montée en série avec un condensateur de capacité 16 µF.



$i(t)$ étant l'intensité du courant, on a aux bornes du condensateur : $C\frac{dy(t)}{dt} = i(t)$

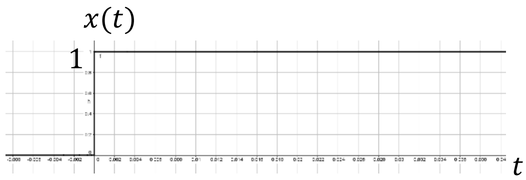
Sur le circuit série RC, on peut écrire :

$$R\, i(t) + y(t) = x(t) \quad \Rightarrow \quad RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Si on pose : $\tau = RC = 1.10^2 \times 16.10^{-6} = 0{,}0016$, pour trouver la tension de sortie $y(t)$ en fonction de celle d'entrée $x(t)$ il faut résoudre l'équation différentielle :

$$0{,}0016\ \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

PARTIE A : La tension $x(t)$ est continue :



On suppose que l'entrée $x(t)$ est un ***échelon*** :

pour $t < 0, x(t) = 0$; pour $t \geq 0, x(t) = 1$

On recherche $y(t)$ solution de l'équation différentielle $0{,}0016\, y' + y = 1$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$.

1- Résoudre l'équation sans second membre
2- Déterminer une solution particulière constante
3- En déduire la fonction $y(t)$ qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$
4- Tracer la courbe représentative de y pour $t \in [0\ ;\ 0{,}01]$

PARTIE B : La tension $x(t)$ est une rampe linéaire $x(t) = 1000\,\mathrm{t}$

On recherche $y(t)$ solution de l'équation différentielle $0{,}0016\, y' + y = 1000\,\mathrm{t}$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$.

1- Résoudre l'équation sans second membre
2- Déterminer une solution particulière sous la forme $A\, t + B$
3- En déduire la fonction $y(t)$ qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$

PARTIE C : La tension $x(t)$ est sinusoïdale $x(t) = \cos(1000\, t)$

On recherche $y(t)$ solution de l'équation différentielle $0{,}0016\, y' + y = \cos(1000\, t)$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$.

1- Résoudre l'équation sans second membre
2- Déterminer une solution particulière sous la forme $A\cos(1000\, t) + B\sin(1000\, t)$
3- En déduire la fonction $y(t)$ qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$