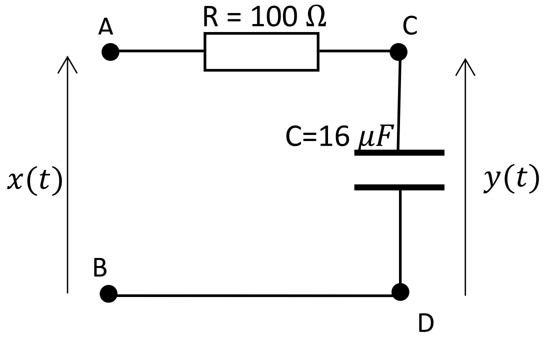
FILTRE PASSE-BAS RC avec entrée ECHELON

On se propose d'étudier un filtre passe-bas de type RC d'un point de vue mathématique, par l'intermédiaire du logiciel Excel.

Une tension $x(t)$ est appliquée entre les points A et B, en entrée de filtre. Une tension $y(t)$ se retrouve entre les points D et C, en sortie de filtre.

Ce filtre est composé d'une résistance R de 100 Ω montée en série avec un condensateur de capacité 16 µF.



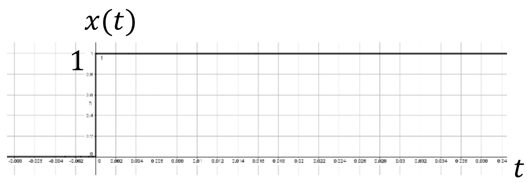
$i(t)$ étant l'intensité du courant, on a aux bornes du condensateur : $C\frac{dy(t)}{dt} = i(t)$

Sur le circuit série RC, on peut écrire :

$$R\,i(t) + y(t) = x(t) \quad \Rightarrow \quad RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Si on pose : $\tau = RC = 1.10^2 \times 16.10^{-6} = 0.0016$, pour trouver
la tension de sortie $y(t)$ en fonction de celle d'entrée $x(t)$ il faut résoudre l'équation différentielle :

$$\tau\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$



On suppose que l'entrée $x(t)$ est un ***échelon*** :

pour $t < 0, x(t) = 0$; pour $t \geq 0, x(t) = 1$

On recherche $y(t)$ sachant que $y(0) = 0$

PARTIE A : Sortie $y(t)$ déterminée en résolvant l'équation différentielle mathématiquement

⇨ On met l'équation différentielle sous une forme $a\,y' + b\,y = c$:

L'équation $\tau\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 1$ *est une équation du type* $a\,y' + b\,y = c$ *avec* $a = \tau$, $b = 1$ *et* $c = 1$

⇨ Les fonctions solutions de l'équation différentielle $a\,y' + b\,y = c$ sont : $y(t) = ke^{-\frac{b}{a}t} + \frac{c}{b}$; k étant une constante déterminée en appliquant la condition initiale qui est ici $y(0) = 0$. On ainsi (à compléter) :

On obtient ainsi : $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

⇨ Sur ordinateur, ouvrir un nouveau fichier sur Excel, à enregistrer dans votre zone de travail sous le nom *FiltreRC.xls* Cliquer sur le 1er onglet et avec un clic droit le nommer *Echelon*

On échantillonne le signal d'entrée avec une fréquence d'échantillonnage f_e.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*n*	*t*	*x(t) échelon*	*y(t) calculé*			**To**	**fe**	Te
2	-1		0				**0,0016**	**1000**	0,001
3	0	0	1						
4	1	=B3+$I$2	1						
5	2	0,002	1						
6	3	0,003	1						
7	4	0,004	1						
8	5	0,005	1						
9	6	0,006	1						
10	7	0,007	1						
11	8	0,008	1						
12	9	0,009	1						
13	10	0,01	1						
14	11	0,011	1						

⇨ Sur H2, écrire la valeur de la fréquence f_e (par exemple 1000 Hz) , sur G2, écrire la valeur de τ (=0.0016 ici). Sur I2, calculer la période d'échantillonnage Te (=$\frac{1}{f_e}$).

⇨ Créer les colonnes A (indice n de la valeur échantillonnée), B (temps $t = n \times Te$), C (=1 si $t \geq 0$)

⇨ Sur la colonne D, calculer les valeurs de $y(t)$ en utilisant l'expression de la fonction $y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

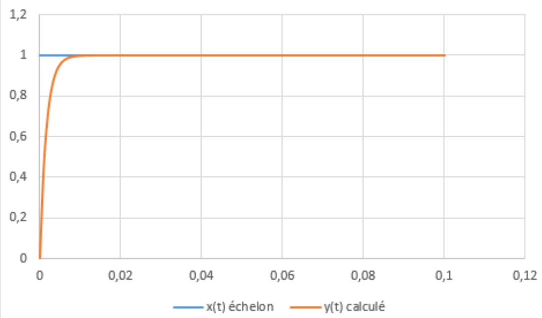
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*n*	*t*	*x(t) échelon*	*y(t) calculé*			**To**	**fe**	Te
2	-1		0				**0,0016**	**1000**	0,001
3	0	0	1	0					
4	1	0,001	1	0,46473857					
5	2	0,002	1	0,7134952					
6	3	0,003	1	0,84664503					
7	4	0,004	1	0,917915					
8	5	0,005	1	0,95606307					
9	6	0,006	1	0,97648225					
10	7	0,007	1	0,98741186					
11	8	0,008	1	0,99326205					

⇨ Déterminer toutes ces valeurs pour un échantillonnage de 100 valeurs (jusqu'à $n = 100$)

⇨ Insérer une courbe Nuage de points pour déterminer la réponse $y(t)$ du filtre à une entrée échelon sur $x(t)$.

⇨ Modifier la valeur de f_e (par exemple $f_e = 10000\ Hz$, voire et $f_e = 100000\ Hz$) observer le changement de l'échelle des temps.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	*n*	*t*	*x(t) échelon*	*y(t) calculé*			**To**	**fe**	Te		
2	-1		0				**0,0016**	**1000**	0,001		
3	0	0	1	0							
4	1	0,001	1	0,46473857							
5	2	0,002	1	0,7134952							
6	3	0,003	1	0,84664503							
7	4	0,004	1	0,917915							
8	5	0,005	1	0,95606307							
9	6	0,006	1	0,97648225							
10	7	0,007	1	0,98741186							
11	8	0,008	1	0,99326205							
12	9	0,009	1	0,99639344							
13	10	0,01	1	0,99806955							
14	11	0,011	1	0,9989667							
15	12	0,012	1	0,99944692							
16	13	0,013	1	0,99970396							
17	14	0,014	1	0,99984154							
18	15	0,015	1	0,99991518							



Q1- Utiliser ces informations pour déterminer les temps t qu'il faut pour que la tension de sortie $y(t)$ soit de 0,63 V (soit 63% de la valeur de l'échelon), et de 0,95 V (soit 95% de la valeur de l'échelon) . Comparer ces temps avec la valeur de τ.

Q2- Retrouver ces 2 temps en résolvant les équations $(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0.63$ et $(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 0.95$

PARTIE B : Sortie $y(t)$ déterminée en résolvant l'équation différentielle numériquement

Le signal d'entrée est une suite x_n définie par $x_n = 0 \; si \; n < 0$ et $x_n = 1 \; si \; n \geq 0$; soit $\{x_n\} = \{1\,;1\,;1\,;1\,;\ldots\ldots\}$. Les différents termes de cette suite sont les valeurs de la tension d'entrée, données tous les $T_e$secondes.

Le signal de sortie sera une suite y_n avec $y_n = 0 \;\; si \;\; n \leq 0$. Pour calculer les différents termes de y_n, on transforme l'équation différentielle en relation de récurrence sur les suites y_n et x_n.

⇨ On détermine l'équation de récurrence (à compléter) :

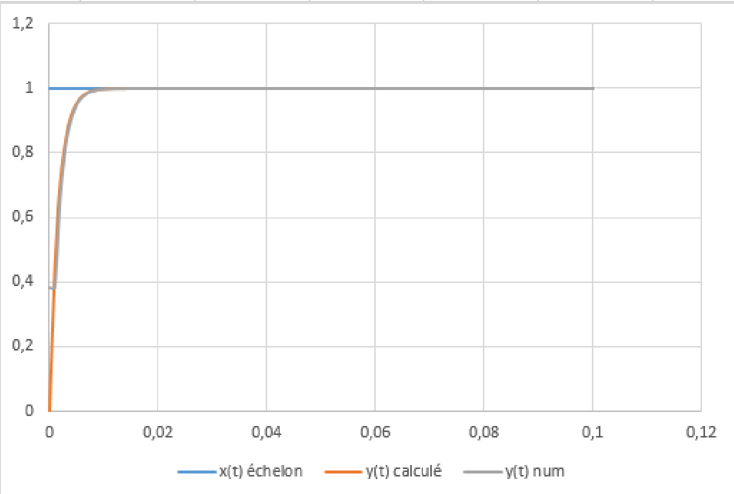
L'équation différentielle $\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$ est équivalente : $\tau \frac{y_n - y_{n-1}}{T_e} + y_n = x_n$

Comme $\frac{1}{T_e}$ est égal à la fréquence d'échantillonnage f_e , on obtient : $\tau \, f_e \, (y_n - y_{n-1}) + y_n = x_n$

On obtient ainsi : $y_n = \frac{x_n + \tau \, f_e \, y_{n-1}}{1 + \tau \, f_e}$

⇨ Sur la colonne E, nommé $y(t)num$, utiliser cette formule de récurrence pour déterminer les valeurs des termes de la suite y_n

A	B	C	D	E	F	G	H	I
n	*t*	*x(t) échelon*	*y(t) calculé*	*y(t) num*		**To**	**fe**	Te
-1		0				**0,0016**	**1000**	0,001
0	0	1	0	0,38461538				
1	0,001	1	0,46473857	0,38461538				
2	0,002	1	0,7134952	0,67060835				
3	0,003	1	0,84664503	0,82368936				
4	0,004	1	0,917915	0,90562771				
5	0,005	1	0,95606307	0,94948615				
6	0,006	1	0,97648225	0,97296189				
7	0,007	1	0,98741186	0,98552754				
8	0,008	1	0,99326205	0,99225345				
9	0,009	1	0,99639344	0,99585357				
10	0,01	1	0,99806955	0,99778058				
11	0,011	1	0,9989667	0,99881203				
12	0,012	1	0,99944692	0,99936412				
13	0,013	1	0,99970396	0,99965964				
14	0,014	1	0,99984154	0,99981782				
15	0,015	1	0,99991518	0,99990249				
16	0,016	1	0,9999546	0,9999478				
17	0,017	1	0,9999757	0,99997206				
18	0,018	1	0,99998699	0,99998505				



⇨ Supprimer la courbe précédente et la remplacer par une courbe qui permette de confronter les valeurs des colonnes C, D et E en fonction du temps (colonne B). Modifier la valeur de la fréquence d'échantillonnage f_e et observer le changement de l'échelle des temps.

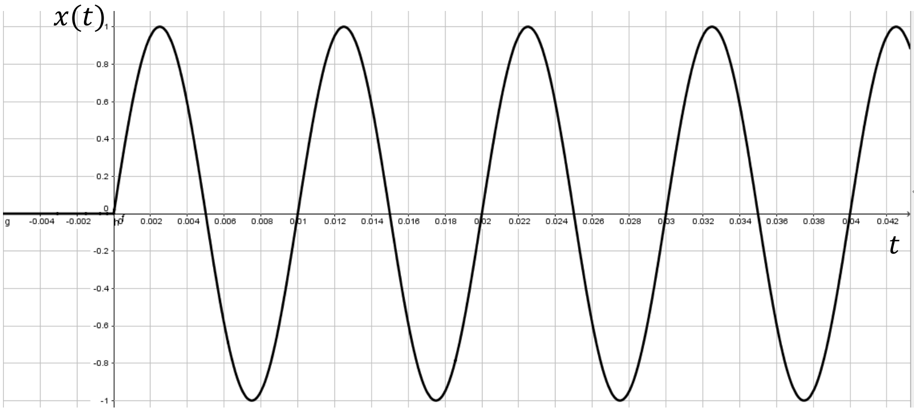
Q2- La correspondance entre les valeurs de la tension de sortie calculées mathématiquement ou déterminées numériquement est-elle bonne ?

TP - FILTRE PASSE-BAS RC avec entrée SINUSOIDALE

On suppose à présent, que l'entrée $x(t)$ est une entrée sinusoïdale d'amplitude A et de fréquence f. Pour $t < 0, x(t) = 0$; pour $t \geq 0$; $x(t) = \mathrm{A}\ \sin(\omega\ t)$

avec : $\omega = 2\pi f$

On recherche $y(t)$ sachant que $y(0) = 0$



PARTIE A : Sortie $y(t)$ déterminée en résolvant l'équation différentielle mathématiquement

Comme vu en physique, la fonction $y(t)$ solution (en régime permanent) de l'équation différentielle $\tau\ \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$ est du type : $y(t) = \mathrm{B}\sin(\omega\ t + \ \varphi)$, B étant l'amplitude du signal de sortie et φ son déphasage par rapport au signal d'entrée.

Pour calculer B et φ, on utilise les nombres complexes : $\underline{X(t)} = A\ e^{j\omega t}$ et $\underline{Y(t)} = B\ e^{j(\omega t+\varphi)}$

⇨ On remplace $x(t)$ et $y(t)$ par : $\underline{X(t)}$ et $\underline{Y(t)}$ dans l'équation différentielle $\tau\ \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$:

D'où : $\tau\ \times j\ \omega\ \underline{Y(t)}\ + \underline{Y(t)} = \underline{X(t)}$

$$\underline{Y(t)}\ (1 + \ j\ \tau\ \omega) = \underline{X(t)}$$

On obtient ainsi la fonction de transfert du filtre : $T(j\ \omega) = \frac{\underline{Y(t)}}{\underline{X(t)}} = \frac{1}{(1+\ j\ \tau\ \omega)}$

On a alors : *Module de* $T(j\ \omega) = |T(j\ \omega)\ | = \left|\frac{1}{(1+\ j\ \tau\ \omega)}\right| = \frac{|1|}{|(1+\ j\ \tau\ \omega)|} = \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\ \omega)^2}} = \left|\frac{\underline{Y(t)}}{\underline{X(t)}}\right| = \frac{|B\ e^{j(\omega t+\varphi)}|}{|A\ e^{j\omega t}|} = \frac{B}{A}$

et $Arg(T(j\ \omega)) = Arg\left(\frac{1}{(1+\ j\ \tau\ \omega)}\right) = Arg(1) - Arg(1 + \ j\ \tau\ \omega) = -Arg(1 + \ j\ \tau\ \omega) = -Arctan\left(\frac{\tau\ \omega}{1}\right) = -Arctan(\tau\ \omega)$

avec aussi : $Arg\big(T(j\ \omega)\big) = Arg\left(\frac{\underline{Y(t)}}{\underline{X(t)}}\right) = Arg\left(\underline{Y(t)}\right) - Arg\left(\underline{X(t)}\right) = Arg\big(B\ e^{j(\omega t+\varphi)}\big) - Arg\big(A\ e^{j\omega t}\big) = \ (\omega t + \varphi) - \omega t = \varphi$

Finalement on obtient : $y(t) = \mathrm{B}\sin(\omega\ t + \ \varphi)$ **avec :** $B = A \times \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\ \omega)^2}}$ **et** $\varphi\ = -Arctan(\tau\ \omega)$

⇨ Sur ordinateur, cliquer sur l'onglet *Echelon* et avec un clic droit le copier. Nommer cet onglet copié : *Sinus*.

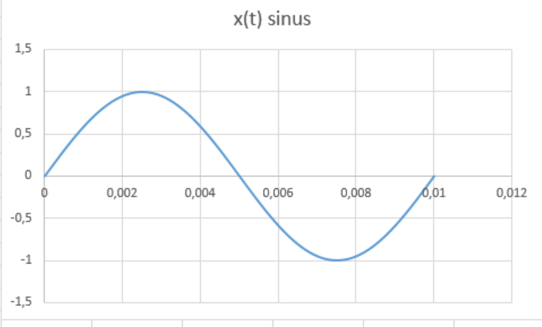
⇨ Sur G5, écrire la valeur de l'amplitude A de x(t) (par exemple 1 V) , sur H5, écrire la valeur de la fréquence f de x(t) (par exemple 100 Hz). Sur I5, calculer la valeur $\omega = 2\pi f$ de x(t).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*n*	*t*	*x(t) échelon*	*y(t) calculé*	*y(t) num*		**To**	**fe**	Te
2	-1		0		0		**0,0016**	**10000**	0,001
3	0	0	1	1	0,38461538				
4	1	0,001	1	0,46473857	0,62130178		**A de x(t)**	**fréq f de x(t)**	omeg de x(t)
5	2	0,002	1	0,7134952	0,76695494		1	100	=2*PI()*H5
6	3	0,003	1	0,84664503	0,85658765				

⇨ Modifier les cellules C1 et C3 en prenant en compte ici que $x(t) = A\ \sin(\omega\ t)$

	A	B	C	D	E
1	*n*	*t*	*x(t) sinus*	*y(t) calculé*	*y(t) num*
2	-1		0		0
3	0	=$G$5*SIN($I$5*B3)		0	0
4	1	0,0001	SIN(nombre)	0,06058694	0,00369356
5	2	0,0002	0,12533323	0,1175031	0,01084883
6	3	0,0003	0,18738131	0,17097088	0,0212331
7	4	0,0004	0,24868989	0,22119922	0,03461291
8	5	0,0005	0,30901699	0,26838437	0,05075433
9	6	0,0006	0,36812455	0,31271072	0,06942316
10	7	0,0007	0,42577929	0,35435147	0,09038529
11	8	0,0008	0,48175367	0,39346934	0,11340696
12	9	0,0009	0,53582679	0,43021718	0,13825518
13	10	0,001	0,58778525	0,46473857	0,16469813
14	11	0,0011	0,63742399	0,49716842	0,19250553
15	12	0,0012	0,68454711	0,52763345	0,22144915
16	13	0,0013	0,72896863	0,55625269	0,25130324
17	14	0,0014	0,77051324	0,58313798	0,28184501
18	15	0,0015	0,80901699	0,60839437	0,31285512
19	16	0,0016	0,84432793	0,63212056	0,34411823
20	17	0,0017	0,87630668	0,65440925	0,37542343
21	18	0,0018	0,90482705	0,67534753	0,40656482

	G	H	I
1	To	fe	Te
2	0,0016	10000	0,0001
4	A de x(t)	fréq f de x(t)	omeg de x(t)
5	1	100	628,318531



⇨ Dupliquer D3 jusqu'à D103 et insérer une courbe *nuage de points* pour les colonnes B et C

⇨ Mettre la valeur de l'échantillonnage à $f_e = 10000\ Hz$. Modifier la valeur de la fréquence f et de l'amplitude A et vérifier que le signal $x(t)$ est correct.

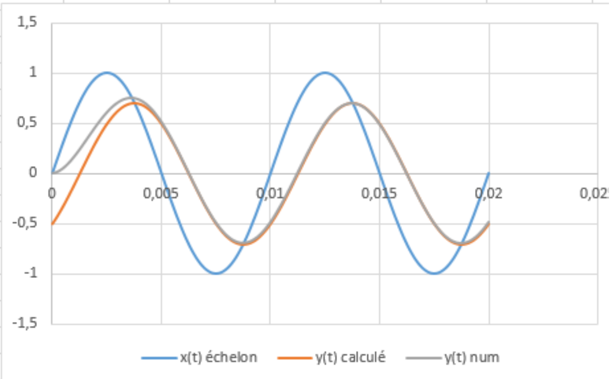
⇨ Modifier la cellule D3 en prenant en compte ici que $y(t)$ calculé est :

$$y(t) = A \times \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\ \omega)^2}} \times \sin\left(\omega\ t - Arctan(\tau\ \omega)\right)$$

⇨Dupliquer D3 jusqu'à D103 afin de modifier toutes les valeurs de $y(t)$ calculé. Pour avoir un meilleur rendu, continuer à dupliquer les colonnes A, B, C ,D et E pour un échantillonnage de 200 valeurs (jusqu'à $n = 200$). On détermine ainsi les signaux sur 0.02 s si $f_e = 10000\ Hz$.

A	B	C	D	E
n	*t*	*x(t) échelon*	*y(t) calculé*	*y(t) num*
-1		0		0
0	0	0	=$G$5/RACINE(1+$G$2*$G$2*$I$5*$I$5)*SIN($I$5*B3-ATAN($G$2*$I$5))	
1	0,0001	0,06279052	-0,46777736	0,00369356
2	0,0002	0,12533323	-0,43371563	0,01084883
3	0,0003	0,18738131	-0,39794223	0,0212331
4	0,0004	0,24868989	-0,36059832	0,03461291
5	0,0005	0,30901699	-0,3218313	0,05075433
6	0,0006	0,36812455	-0,28179416	0,06942316
7	0,0007	0,42577929	-0,24064491	0,09038529
8	0,0008	0,48175367	-0,19854594	0,11340696
9	0,0009	0,53582679	-0,1556634	0,13825518
10	0,001	0,58778525	-0,11216652	0,16469813
11	0,0011	0,63742399	-0,06822698	0,19250553
12	0,0012	0,68454711	-0,02401818	0,22144915
13	0,0013	0,72896863	0,02028541	0,25130324
14	0,0014	0,77051324	0,06450895	0,28184501
15	0,0015	0,80901699	0,1084779	0,31285512
16	0,0016	0,84432793	0,15201873	0,34411823
17	0,0017	0,87630668	0,19495962	0,37542343
18	0,0018	0,90482705	0,23713109	0,40656482
19	0,0019	0,92977649	0,27836671	0,43734198
20	0,002	0,95105652	0,31850374	0,46756048

G	H	I
To	fe	Te
0,0016	10000	0,0001
A de x(t)	fréq f de x(t)	omeg de x(t)
1	100	628,318531



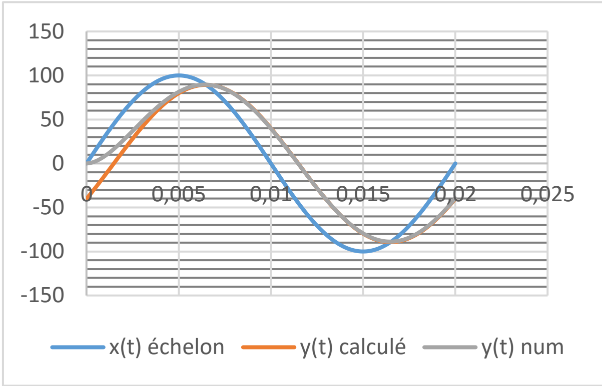
PARTIE B : Sortie $y(t)$ déterminée en résolvant l'équation différentielle numériquement

Le signal d'entrée est une suite x_n définie par $x_n = 0\ si\ n < 0$ et $x_n = A\ \sin(\omega\ t)\ avec\ t = \frac{n}{fe} si\ n \geq 0$; soit $\{x_n\} = \{1\ ; 0.06279\ ; 0.1253\ ; 0.173\ ; \ldots \ldots\}$ si $f_e = 10000$ et $f = 100$ Les différents termes de cette suite sont les valeurs de la tension d'entrée, données tous les $T_e$secondes.

Le signal de sortie sera une suite y_n avec $y_n = 0\ \ si\ \ n \leq 0$. Pour calculer les différents termes de y_n, on transforme l'équation différentielle en relation de récurrence sur les suites y_n et x_n. On a comme avant : $y_n = \frac{x_n\ +\ \tau\ f_e\ y_{n-1}}{1\ +\ \tau\ f_e}$

La colonne $y(t) num$ n'est donc pas à modifier car la résolution numérique de l'équation différentielle se fait à partir des valeurs de $x(t)$ qui ont déjà été modifiées.

⇨ Insérer une courbe *nuage de points* pour les colonnes B, C, D et E. Modifier la valeur de la fréquence f de $x(t)$ entre 1 Hz et 5000 Hz (limite de Shanon = $\frac{f_e}{2}$). Observer la bonne corrélation entre $y(t)$ calculé et $y(t)$ déterminé numériquement. Observer aussi que plus la fréquence f est élevée, plus l'amplitude du signal de sortie est faible : on a bien un filtre passe-bas.



Q3- Fixer l'amplitude A = 100 V. Fixer la valeur de la fréquence f à 50 Hz. On lit une amplitude du signal de sortie d'environ : B = 90 V, soit en dB une atténuation de 20 $log\frac{B}{A} = 20 \log 0.9$ =-0.9 dB
De la même manière, en modifiant f, lire sur la courbe l'amplitude B en sortie de filtre et compléter le tableau ci-dessous :

Fréquence f	25 Hz	50 Hz	100 Hz	200 Hz	500 Hz	1000 Hz	2000 Hz
$\boldsymbol{\frac{B}{A}}$		0.90					0.05
$\boldsymbol{20\,log\frac{B}{A}}$		-0.9 dB					-26 dB

PARTIE C : Performances du filtre en traçant un diagramme de Bode

La résolution mathématique de l'équation différentielle du filtre, a permis de calculer la tension de sortie :

$x(t) = \mathrm{A}\sin(\omega\, t)$ → **Filtre Passe-Bas** → $y(t) = \mathrm{B}\sin(\omega\, t + \varphi)$

avec : $B = A \times \frac{1}{\sqrt{1+(\tau\ \omega)^2}}$

et $\varphi = -Arctan(\tau\ \omega)$

Afin de synthétiser cette étude, on se propose de tracer les courbes visualisant l'évolution de l'atténuation 20 $log\frac{B}{A}$ (en dB) et du déphasage φ (en radians) en fonction de la fréquence f (en Hz) de la tension $x(t)$:

20 $log\frac{B}{A}$ en fonction de f et φ en fonction de f

⇨ Sur le même fichier Excel, ouvrir un 3ième onglet que l'on nommera *Bode*. Dans celui-ci, compléter les colonnes A, B , C et E

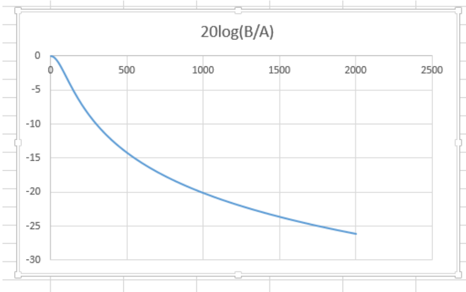
	A	B	C	D	E	F
1	***Fréquence f***	***20log(B/A)***	***Déphasage***		***To***	
2	0	0	0		**0,0016**	
3	10					
4						

=20*LOG10(1/RACINE(1+PUISSANCE($E$2*2*PI()*A2;2)))

=-ATAN($E$2*2*PI()*A2)

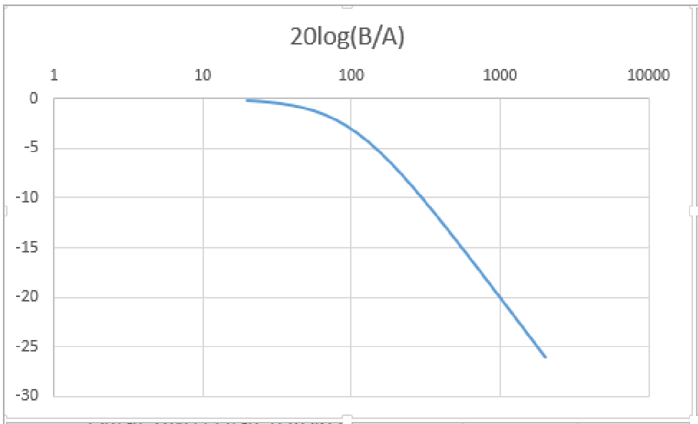
⇨ Dupliquer pour un calcul jusqu'à la fréquence f = 2000 Hz.

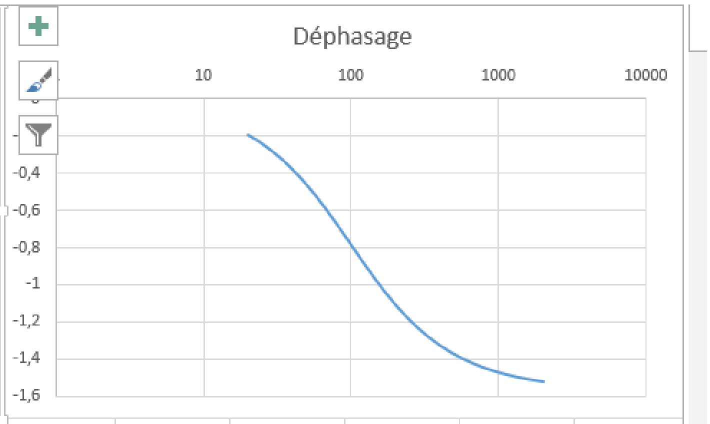
⇨ Sélectionner les colonnes A et B et insérer un nuage de points :



⇨ Sur cette courbe, cliquer sur l'axe des fréquences, choisir *Mise en forme* de l'axe et choisir *échelle logarithmique*.

⇨ Faire de même pour l'évolution du déphasage





Q4- Placer le diagramme de l'atténuation les 7 points correspondants aux fréquences f tu tableau de la question Q3

PARTIE D : Conclusion sur les performances du filtre en ayant une entrée composée de 2 fonctions sinusoïdales

On suppose que la tension d'entrée est :

$$x(t) = A_1 \sin\left(2\pi\, f_1\, t\right) + A_2 \sin\left(2\pi\, f_2\, t\right)$$

avec $f_1 = 50\ Hz$; $f_2 = 2000\ Hz$ et $A_1 = A_2 = 1$

On se propose de vérifier ici qu'en sortie de ce filtre passe-bas, la composante à 50 Hz est peu atténuée (-0.9 dB) et celle à 2000 Hz, l'est beaucoup (-26 dB).

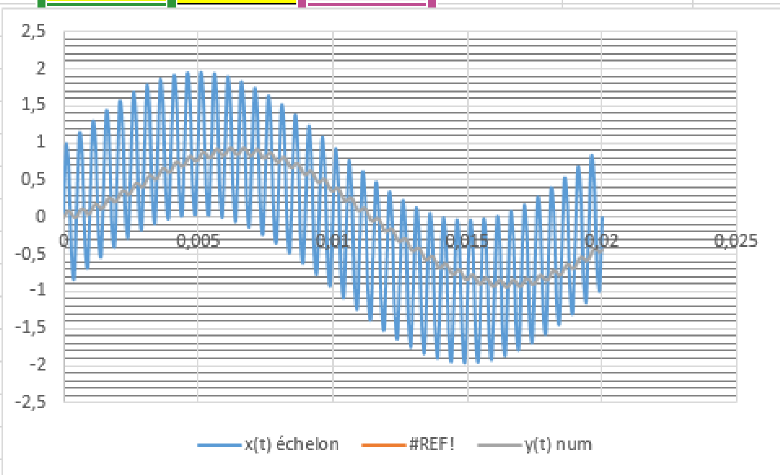
⇨ Sur ordinateur, cliquer sur l'onglet *Sinus* et avec un clic droit le copier. Nommer cet onglet copié : *2 Sinus*.

⇨ Pour un souci de simplicité, la tension $y(t)$ ne sera que déterminée numériquement. Donc, par un clic droit sur la colonne D, supprimer toute la colonne $y(t)calculé$.

⇨ Par un copié-collé, compléter les cellules de F4 à H7

⇨ Modifier sur la cellule C3 la valeur de $x(t) = A_1 \sin(\omega_1\, t) + A_2 \sin(\omega_2\, t)$ et la dupliquer sur tout la colonne. On s'aperçoit sur la courbe déjà tracée que sur la sortie $y(t)$ la composante à 2000 Hz a presque disparue.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*n*	*t*	*x(t) échelon*	*y(t) num*		To	fe	Te
2	-1		0	0		0,0016	10000	0,0001
3	=$F$5*SIN($H$5*B3)+$F$7*SIN($H$7*			0				
4			B3)	0,05779219		A1 de x(t)	fréq f1 de x(t)	omeg de x(t)
5	2	0,0002	(SIN(nombre)	,09266181		1	50	314,159265
6	3	0,0003	-0,49367694	0,0581713		A2 de x(t)	fréq f2 de x(t)	omeg de x(t)
7	4	0,0004	-0,82572328	0,0061775		1	2000	12566,3706
8	5	0,0005	0,15643447	0,01501615				
9	6	0,0006	1,13843783	0,08109977				
10	7	0,0007	0,80592849	0,12373676				
11	8	0,0008	-0,33909537	0,09651134				
12	9	0,0009	-0,67206541	0,05130094				
13	10	0,001	0,30901699	0,06646071				
14	11	0,0011	1,28979444	0,13842152				
15	12	0,0012	0,9559098	0,18650906				
16	13	0,0013	-0,19063736	0,16432398				
17	14	0,0014	-0,52527722	0,1237592				
18	15	0,0015	0,4539905	0,14318457				
19	16	0,0016	1,43281019	0,2190449				
20	17	0,0017	1,09682667	0,27067913				
21	18	0,0018	-0,05195846	0,25170044				
22	19	0,0019	-0,38897314	0,21401376				



Q4- Sortir sur imprimante la courbe pour $f_1 = 100\ Hz$; $f_2 = 1000\ Hz$; et $A_1 = 4$; $A_2 = 1$