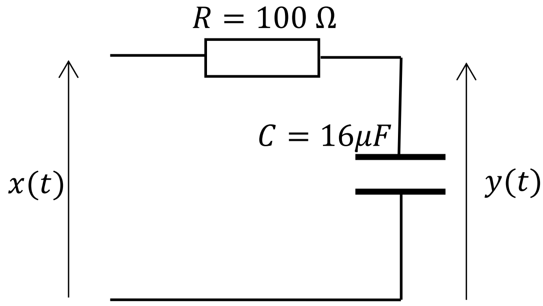
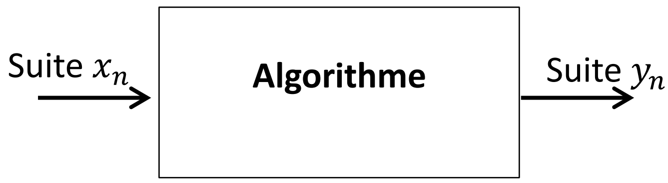
TD BTS SN **_RESOLUTION NUMERIQUE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE_**

Exercice 1 : *Filtre Passe bas de type RC*

Une tension $x(t)$ est appliquée en entrée d'un filtre analogique. En écrivant les lois électriques, on peut démontrer que la tension de sortie $y(t)$ est la solution de l'équation différentielle suivante :
$\mathbf{0.0016\, y'(t) + y(t) = x(t)}$



On désire réaliser un équivalent numérique de ce filtre.
Le signal $x(t)$ est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1\,000Hz$ pour constituer une suite x_n. En sortie de filtre, on retrouve une suite y_n.

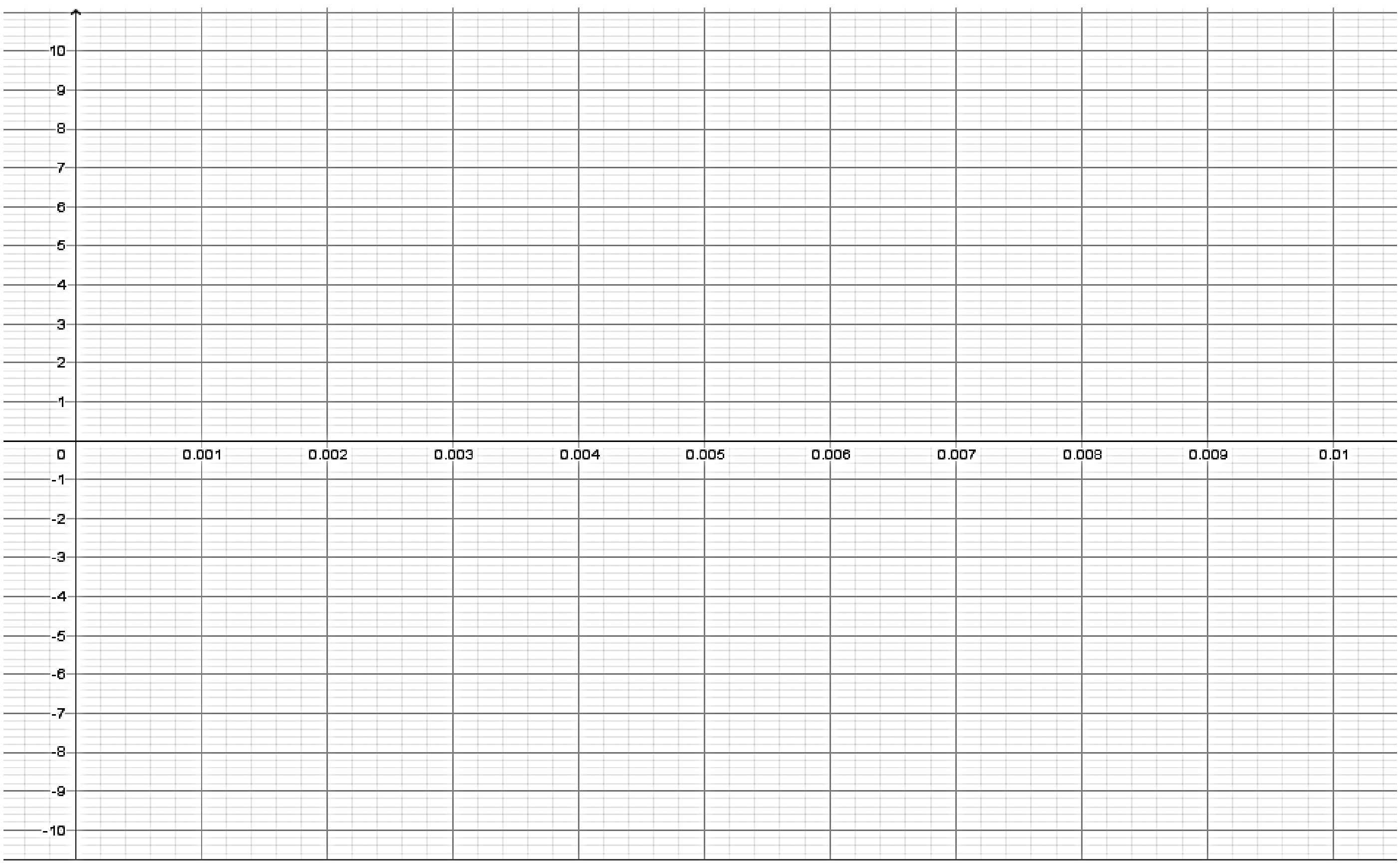


PARTIE A : Tension d'entrée sinusoïdale de fréquence 100 Hz : $x(t) = 10\cos(2\pi \times 100t)$

1- Calculer la période d'échantillonnage T_e et compléter les lignes t et x_n du tableau ci-dessous :

$\boldsymbol{n}$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{t = n\, T_e}$												
$\boldsymbol{x_n}$	0											
$\boldsymbol{y_n}$	0											

2- Tracer la courbe représentative du signal $x(t)$



3- Déterminer la relation de récurrence donnant y_n en fonction de x_n et de y_{n-1}

4- Calculer les 11 premiers termes de la suite $y_n$et compléter la ligne y_n du tableau précédent

5- Tracer la courbe représentative du signal de sortie sur le graphe précédent

6- Relever sur la courbe le déphasage Δt entre les signaux d'entrée et de sortie. En déduire l'expression de la fonction $y(t)$

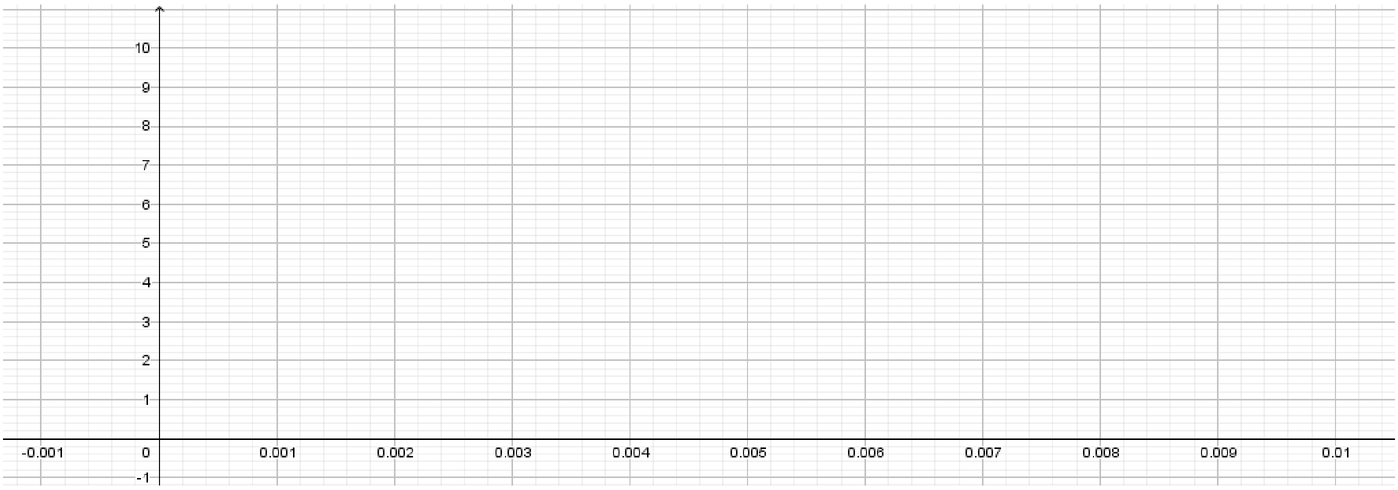
7- Calculer l'atténuation de dB du filtre

PARTIE B : Tension d'entrée Echelon $x(t) = 10$ pour $t \geq 0$ et $x(t) = 0$ pour $t < 0$

1- Compléter les lignes t et x_n du tableau ci-dessous :

$\boldsymbol{n}$	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$\boldsymbol{t = n\,T_e}$												
$\boldsymbol{x_n}$	0											
$\boldsymbol{y_n}$	0											

2- Tracer la courbe représentative du signal d'entrée $x(t)$



3- Calculer les 11 premiers termes de la suite $y_n$et compléter la ligne y_n du tableau précédent

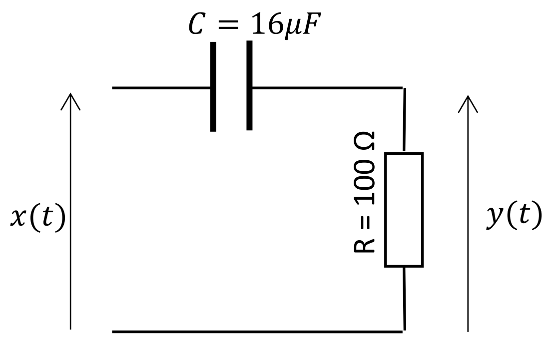
4- Tracer la courbe représentative du signal de sortie sur le graphe précédent

On se propose de comparer ces résultats avec ceux obtenus en résolvant l'équation différentielle $\mathbf{0.0016\,y'(t) + y(t) = x(t)}$ issue des lois de l'électricité. Ici, comme $x(t) = 10$, on a à trouver la fonction $y(t)$ solution de $\mathbf{0.0016\,y' + y = 10}$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$

5- Déterminer $y(t)$ en résolvant l'équation différentielle

6- Tracer la courbe représentative de $y(t)$ sur le graphe précédent

Exercice 2 : *Filtre Passe haut de type RC*

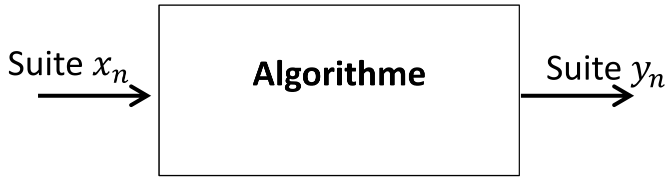


Une tension $x(t)$ est appliquée en entrée d'un filtre analogique.
En écrivant les lois électriques, on peut démontrer que la tension de sortie $y(t)$ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\mathbf{0.0016\, y'(t) + y(t) = 0.0016\, x'(t)}$$

La tension d'entrée $x(t)$ est une ***rampe*** d'équation $x(t) = 1000\, t$

On désire réaliser un équivalent numérique de ce filtre.
Le signal $x(t)$ est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1\,000 Hz$ pour constituer une suite x_n. En sortie de filtre, on retrouve une suite y_n.

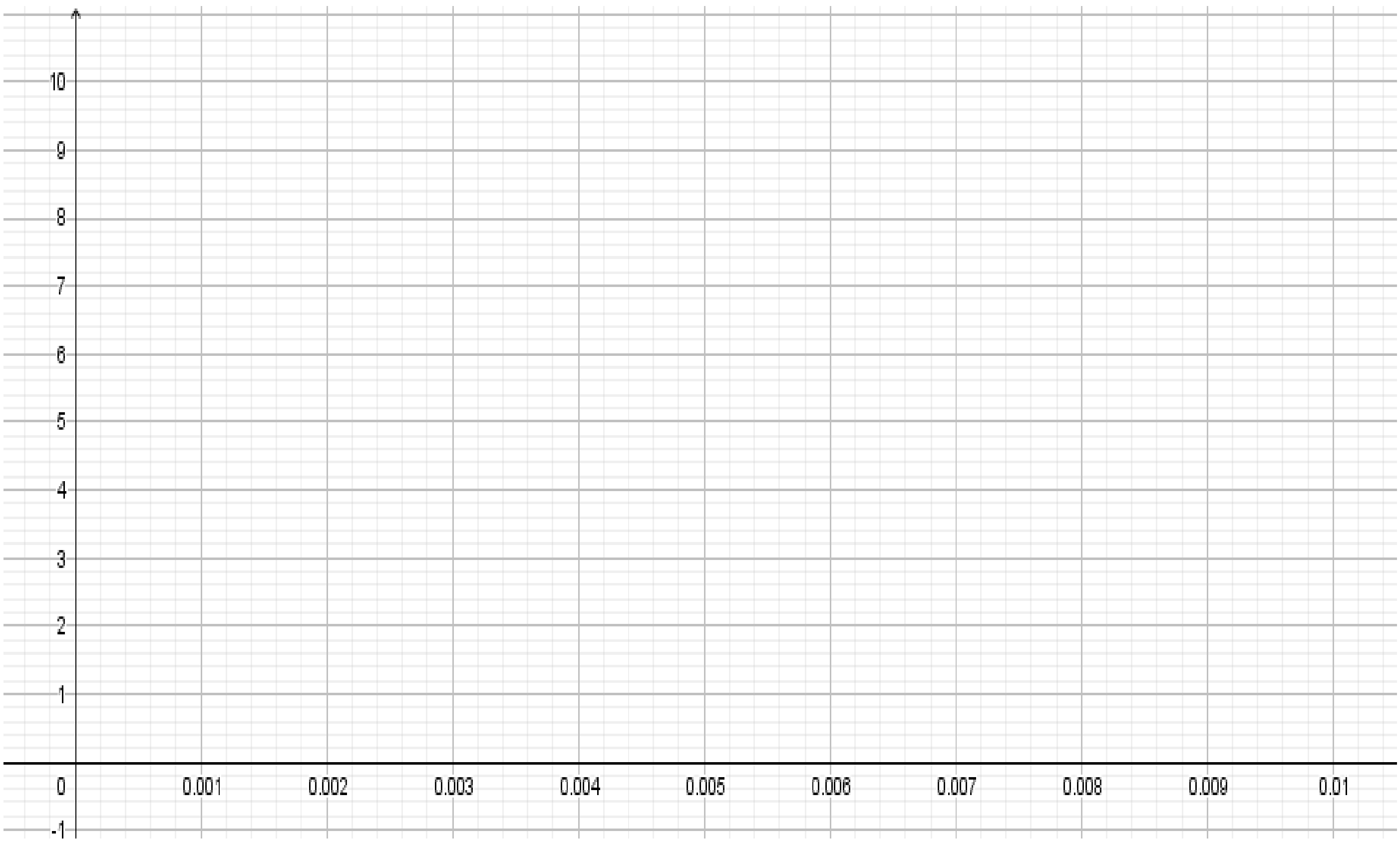


PARTIE A : *Résolution numérique de l'équation différentielle*

1- Calculer la période d'échantillonnage T_e et compléter les lignes t et x_n du tableau ci-dessous :

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t = n\, T_e$												
x_n	0											
y_n	0											

2- Tracer la courbe représentative du signal d'entrée $x(t)$



3- Déterminer la relation de récurrence donnant y_n en fonction de x_n ; x_{n-1} et y_{n-1}

4- Calculer les 11 premiers termes de la suite y_n et compléter la ligne y_n du tableau précédent

5- Tracer la courbe représentative du signal de sortie sur le graphe précédent

__PARTIE B :__ *Résolution mathématique de l'équation différentielle*

La tension d'entrée est une fonction d'expression : $x(t) = 1000\,t$. On a donc : $x'(t) = 1000$ et l'équation différentielle issue des lois de l'électricité devient : $0.0016\,y'(t) + \mathrm{y(t)} = 0.0016\ \times 1000$
soit : $0.0016\,y'(t) + \mathrm{y(t)} = 1.6$ avec comme CI : $y(0) = 0$

1- Déterminer la fonction $y(t)$ solution de l'équation différentielle précédente

2- Tracer sur le graphe précédent, la courbe représentative de la fonction y pour $0 < t < 0.01$