TD BTS SN **_RESOLUTION NUMERIQUE D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE_**

Exercice 1: *Injection médicament*

A l'instant $t = 0$, on injecte à un malade une substance médicamenteuse qui est ensuite progressivement éliminée. On désigne par $y(t)$ la concentration de la substance en mg/L dans le sang, présente à l'instant t, exprimé en heures. On suppose qu'à chaque instant t, la vitesse d'élimination $y'(t)$ est proportionnelle à la concentration restante dans le sang du malade. Cette hypothèse se traduit mathématiquement par l'équation différentielle (E) :
$2\,y' + 0.4y = 0$. A l'instant $t = 0$, $y(0) = 80\,mg/L$

PARTIE A : *Résolution numérique de l'équation différentielle*

Le fonction $y(t)$ est échantillonnée avec une période d'échantillonnage $T_e = 1\,h$ pour constituer une suite y_n. On a ainsi : $y_0 = 80$; y_1 =concentration après 1h , ..., y_n = concentration après n heures

1- Déterminer la relation de récurrence donnant y_n en fonction de y_{n-1}

L'E.D. est : $2\,y'(t) + 0{,}4\,\mathrm{y(t)} = 0$

En travaillant sur les signaux échantillonnés :

$$2\,\frac{(y_n - y_{n-1})}{1} + 0{,}4\,y_n = 0$$

Ce qui donne :

$$2\,(y_n - y_{n-1}) + 0{,}4\,y_n = 0$$

$$2\,y_n - 2\,y_{n-1} + 0{,}4\,y_n = 0$$

$$2{,}4\,y_n - 2\,y_{n-1} = 0$$

$$2{,}4\,y_n = 2\,y_{n-1}$$

Et finalement :

$$y_n = \frac{2\,y_{n-1}}{2{,}4}$$

Soit :

$$\boldsymbol{y_n = \frac{y_{n-1}}{1{,}2}}$$

2- Calculer les 11 premières valeurs de la suite y_n e compléter le tableau ci-dessous :

Pour $n = 0$: $y_0 = 80$

Pour $n = 1$: $y_1 = \frac{y_0}{1{,}2} = \frac{80}{1{,}2} \approx 66{,}7$

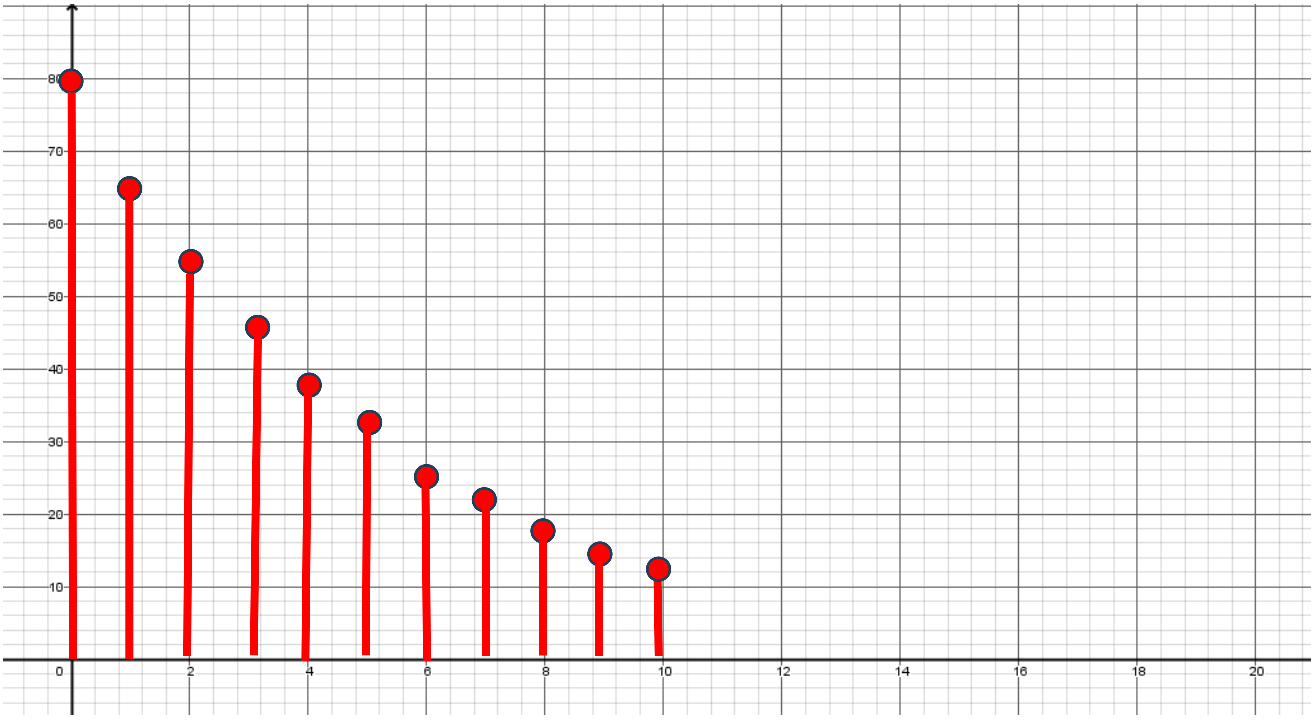
Pour $n = 2$: $y_2 = \frac{y_1}{1{,}2} = \frac{66{,}7}{1{,}2} \approx 55{,}6$

Pour $n = 3$: $y_3 = \frac{y_2}{1{,}2} = \frac{55{,}6}{1{,}2} \approx 46{,}3$

Pour $n = 4$: $y_4 = \frac{y_3}{1{,}2} = \frac{46{,}3}{1{,}2} \approx 38{,}6$ etc ....

$\boldsymbol{n}$	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$\boldsymbol{t = n\,T_e}$ en heures		*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$\boldsymbol{y_n}$	0	80	66,7	55,6	46,3	38,6	32,2	26,8	22,3	18,6	15,5	12,9

3- Tracer ci-dessous la courbe représentative du signal $y(t)$



PARTIE B : *Résolution mathématique de l'équation différentielle*

1- Déterminer la fonction $y(t)$ solution de l'équation $2\,y' + 0{,}4y = 0$ avec comme CI : $y(0) = 80\;mg/L$

L'E.D. sans second membre est $2\,y' + 0{,}4\,y = 0$ **.** On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions solutions sont du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit $y_0(t) = K\,e^{-\frac{0{,}4}{2}t} = K\,e^{-0{,}2\,t}$

Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 80$ doit vérifier :

$$K\,e^{-0{,}2\times 0} = 80$$

Soit : $K\,e^{0} = 80$

Soit : $K = 80$

Finalement : $y(t) = 80\,e^{-0{,}2\,t}$

2- Tracer sur le repère ci-dessus, la courbe représentative de la fonction f pour $0 < t < 20$

Exercice 2: *Refroidissement d'une pièce d'habitation*

On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation au temps $t = 0$. La température y est alors de 20°C. La température extérieure est constante et égale à 11°C. On définit la fonction y définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $y(t)$ la température de cette pièce en °C, au temps $t > 0$ exprimé en heures. Les principes de la physique permettent d'établir que la fonction y est solution de l'équation différentielle : $2\,y' + 0.24\,y = 2.64$ avec comme condition initiale : $y(0) = 20$

PARTIE A : *Résolution numérique de l'équation différentielle*

Le fonction $y(t)$ est échantillonnée avec une période d'échantillonnage $T_e = 2\,h$ pour constituer une suite y_n. On a ainsi : $y_0 = 20$; y_1 =température après 2h , ..., y_n = température après $n \times 2$ heures

1- Déterminer la relation de récurrence donnant y_n en fonction de y_{n-1}

L'E.D. est : $2\,y'(t) + 0{,}24\,\mathrm{y(t)} = 2{,}64$

En travaillant sur les signaux échantillonnés :

$$2\,\frac{(y_n - y_{n-1})}{2} + 0{,}24\,y_n = 2{,}64$$

Ce qui donne :

$$(y_n - y_{n-1}) + 0{,}24\,y_n = 2{,}64$$

$$y_n - y_{n-1} + 0{,}24\,y_n = 2{,}64$$

$$1{,}24\,y_n - y_{n-1} = 2{,}64$$

$$1{,}24\,y_n = 2{,}64 + y_{n-1}$$

Et finalement :

$$\boldsymbol{y_n = \frac{2{,}64 + y_{n-1}}{1{,}24}}$$

2- Calculer les 11 premières valeurs de la suite y_n e compléter le tableau ci-dessous :

Pour $n = 0$: $y_0 = 20$

Pour $n = 1$: $y_1 = \frac{2{,}64+y_0}{1{,}24} = \frac{2{,}64+20}{1{,}24} \approx 18{,}3$

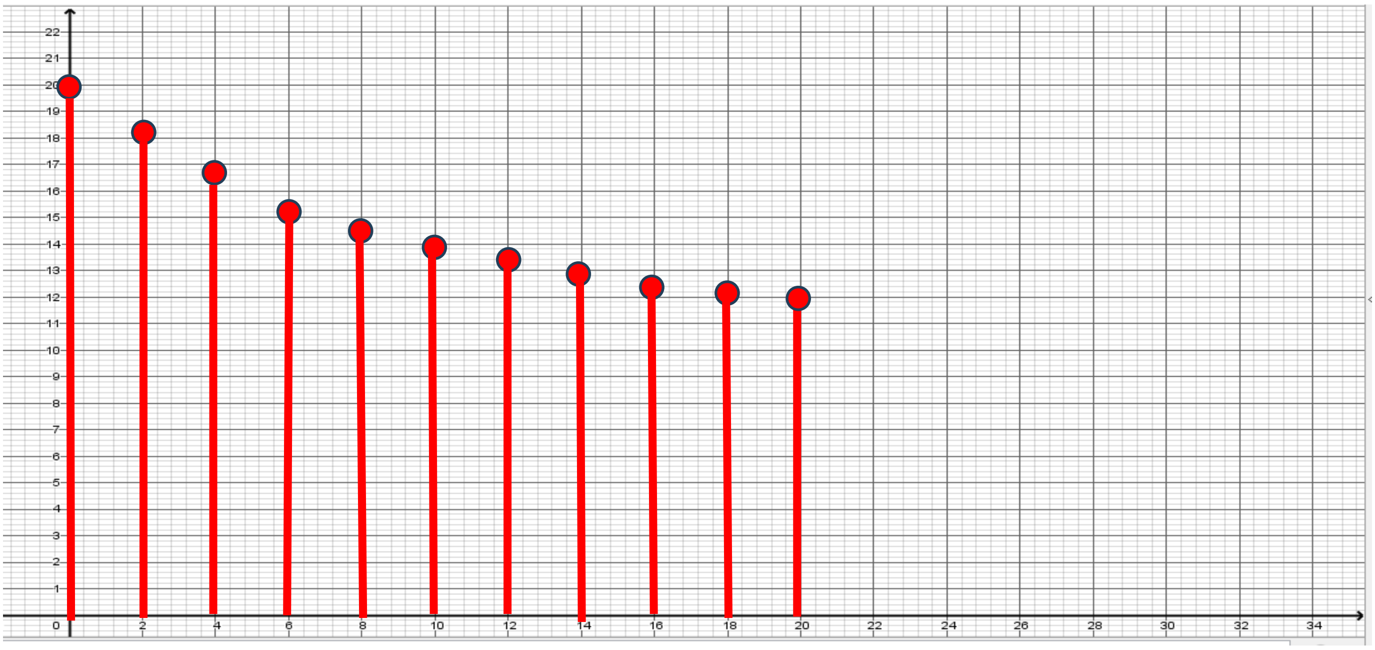
Pour $n = 2$: $y_2 = \frac{2{,}64+y_1}{1{,}24} = \frac{2{,}64+18{,}3}{1{,}24} \approx 16{,}9$

Pour $n = 3$: $y_3 = \frac{2{,}64+y_2}{1{,}24} = \frac{2{,}64+16{,}9}{1{,}24} \approx 15{,}7$

Pour $n = 4$: $y_4 = \frac{2{,}64+y_3}{1{,}24} = \frac{2{,}64+15{,}7}{1{,}24} \approx 14{,}8$ etc ....

$\boldsymbol{n}$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{t = n\,T_e}$ en heures		0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$\boldsymbol{y_n}$	0	20	18,3	16,9	15,7	14,8	14,1	13,5	13,0	12,6	12,3	12

3- Tracer ci-dessous la courbe représentative du signal $y(t)$



PARTIE B : *Résolution mathématique de l'équation différentielle*

4- Déterminer la fonction $y(t)$ solution de l'équation $2\,y' + 0{,}24\,y = 2{,}64$ avec comme CI : $y(0) = 20$

L'E.D. sans second membre est $2\,y' + 0{,}24\,y = 0$. On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions solutions sont du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit $y_0(t) = K\,e^{-\frac{0{,}24}{2}t} = K\,e^{-0{,}12t}$

$y_p(t) = A$ est solution de l'E.D. avec second membre $2\,y' + 0{,}24\,y = 2{,}64$.

On a $y_p{}'(t) = 0$ car A est une constante. En remplaçant $y_p(t) = A$ dans l'E.D., on obtient :

$$2 \times 0 + 0{,}24\,A = 2{,}64$$

Soit : $A = \frac{2{,}64}{0{,}24} = 11$

Finalement : $y_p(t) = 11$

On a donc finalement : $y(t) = y_0(t) + y_p(t) = K\,e^{-0{,}12t} + 11$

Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 20$ doit vérifier :

$K\,e^{-0{,}24 \times 0} + 11 = 20$

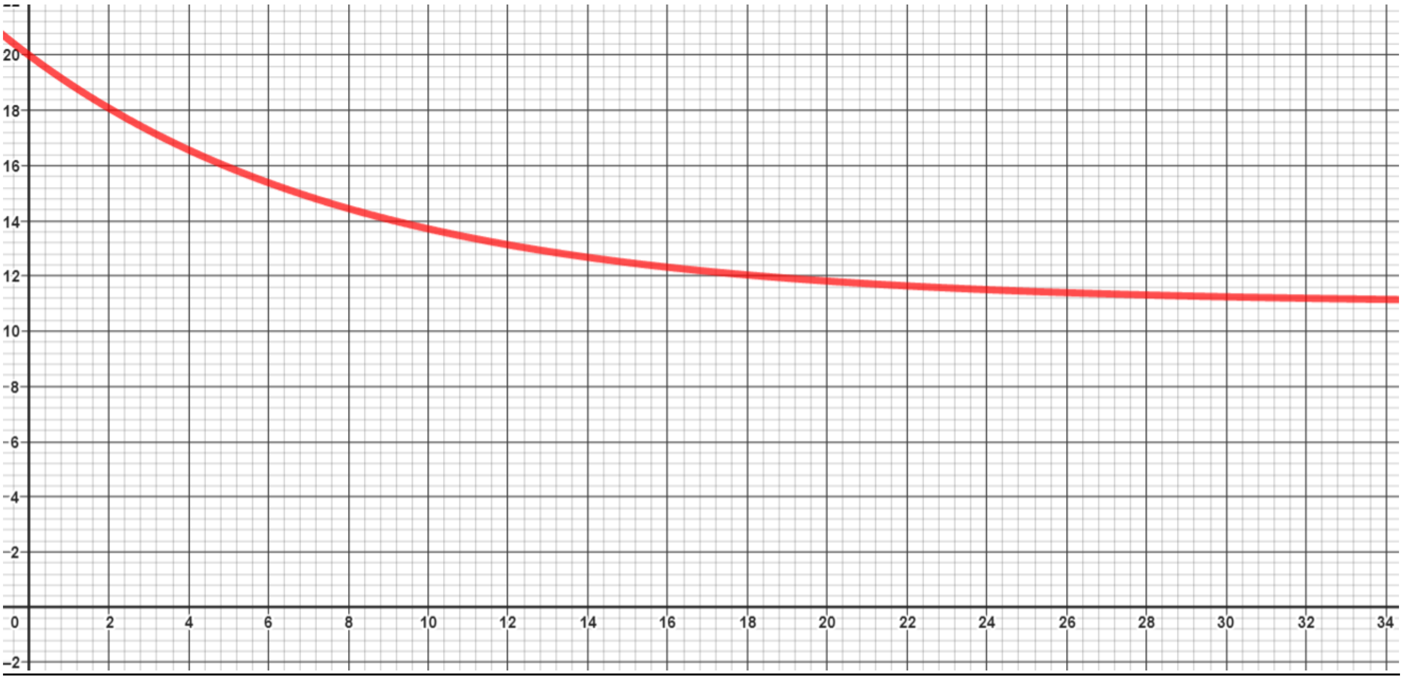
Soit : $K\,e^{0} + 11 = 20$

Soit : $K + 11 = 20$

Soit : $K = 9$

Finalement : $y(t) = 9\,e^{-0{,}12\,t} + 11$

5- Tracer sur le repère ci-dessus, la courbe représentative de la fonction f pour $0 < t < 34$



20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
−2