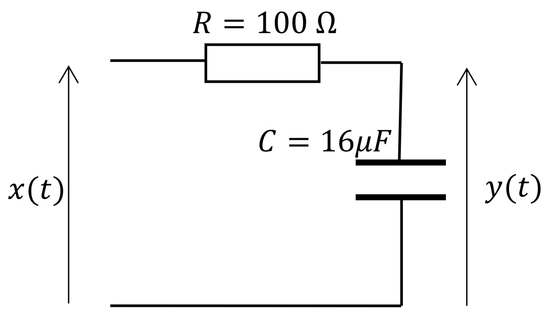
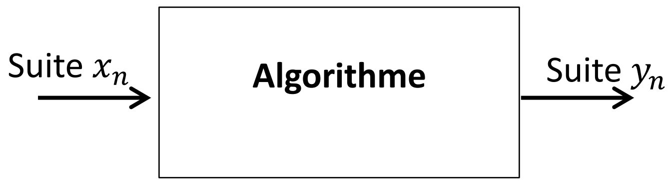
Exercice 1 : *Filtre Passe bas de type RC*

Une tension $x(t)$ est appliquée en entrée d'un filtre analogique. En écrivant les lois électriques, on peut démontrer que la tension de sortie $y(t)$ est la solution de l'équation différentielle suivante :
$\mathbf{0.0016\, y'(t) + y(t) = x(t)}$



On désire réaliser un équivalent numérique de ce filtre. Le signal $x(t)$ est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1\,000 Hz$ pour constituer une suite x_n. En sortie de filtre, on retrouve une suite y_n.

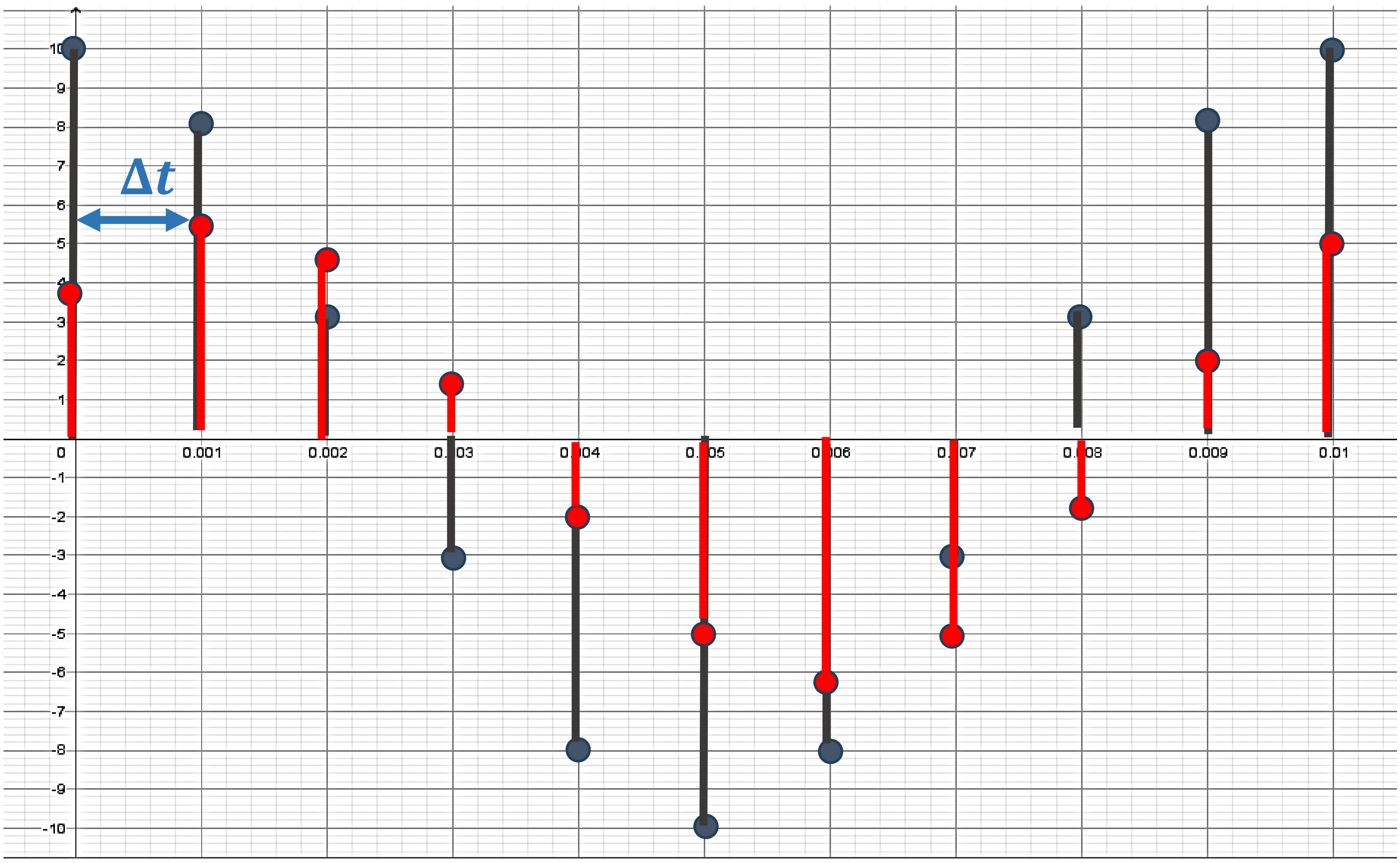


PARTIE A : Tension d'entrée sinusoïdale de fréquence 100 Hz : $x(t) = 10\cos(2\pi \times 100t) = 10\cos(628\, t)$

1- Calculer la période d'échantillonnage T_e et compléter le tableau ci-dessous : $T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{1000} = 0{,}001\ s$

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t = n\,T_e$		0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
x_n	0	10 cos (0) 10	10 cos (0,628) 8,1	10 cos (0,126) 3,1	10 cos (0,628) -3,1	10 cos (0,628) -8,1	10 cos (0,628) -10	10 cos (0,628) -8,1	10 cos (0,628) -3,1	10 cos (0,628) 3,1	10 cos (0,628) 8,1	10 cos (0,628) 10
y_n	0											

2- Tracer la courbe représentative du signal d'entrée $x(t)$



3- Déterminer la relation de récurrence donnant y_n en fonction de x_n et de y_{n-1}

L'E.D. est : $0.0016\, y'(t) + \text{y}(\text{t}) = x(t)$

En travaillant sur les signaux échantillonnés :

$$0.0016\, \frac{(y_n - y_{n-1})}{0{,}001} + y_n = x_n$$

Ce qui donne :

$$\frac{0.0016}{0{,}001}(y_n - y_{n-1}) + y_n = x_n$$

$$1{,}6\,(y_n - y_{n-1}) + y_n = x_n$$

$$1{,}6\, y_n - 1{,}6\, y_{n-1} + y_n = x_n$$

$$2{,}6\, y_n - 1{,}6\, y_{n-1} = x_n$$

$$2{,}6\, y_n = x_n + 1{,}6\, y_{n-1}$$

Et finalement :

$$\boldsymbol{y_n = \frac{x_n + 1,6\, y_{n-1}}{2,6}}$$

4- Calculer les 11 premiers termes de la suite y_n et compléter la ligne y_n du tableau précédent

Pour $n = 0$: $y_0 = \frac{x_0 + 1{,}6\, y_{-1}}{2{,}6} = \frac{\mathbf{10} + 1{,}6 \times \mathbf{0}}{2{,}6} = 3{,}8$

Pour $n = 1$: $y_1 = \frac{x_1 + 1{,}6\, y_0}{2{,}6} = \frac{\mathbf{8.1} + 1{,}6 \times \mathbf{3{,}8}}{2{,}6} = 5{,}5$

Pour $n = 2$: $y_2 = \frac{x_2 + 1{,}6\, y_1}{2{,}6} = \frac{\mathbf{3{,}1} + 1{,}6 \times \mathbf{5.5}}{2{,}6} = 4{,}6$

Pour $n = 3$: $y_3 = \frac{x_3 + 1{,}6\, y_2}{2{,}6} = \frac{\mathbf{-3{,}1} + 1{,}6 \times \mathbf{4.6}}{2{,}6} = 1.6$

Pour $n = 4$: $y_4 = \frac{x_4 + 1{,}6\, y_3}{2{,}6} = \frac{\mathbf{-8{,}1} + 1{,}6 \times \mathbf{1.6}}{2{,}6} = -2.1$ etc ....

$\boldsymbol{n}$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\boldsymbol{t = n\, T_e}$		0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
$\boldsymbol{x_n}$	0	10 cos (0) 10	10 cos (0,628) 8,1	10 cos (0,126) 3,1	10 cos (0,628) -3,1	10 cos (0,628) -8,1	10 cos (0,628) -10	10 cos (0,628) -8,1	10 cos (0,628) -3,1	10 cos (0,628) 3,1	10 cos (0,628) 8,1	10 cos (0,628) 10
$\boldsymbol{y_n}$	0	3,8	5,5	4,6	1,6	-2,1	-5,1	-6,3	-5.1	-1.9	1,9	5

5- Tracer la courbe représentative du signal de sortie sur le graphe précédent

Courbe rouge sur le graphique précédent

6- Relever sur la courbe le déphasage Δt entre les signaux d'entrée et de sortie. En déduire l'expression de la fonction $y(t)$

On relève sur la courbe un déphasage $\Delta t \approx 0{,}001\ s$ et une amplitude de 5,5 . On a donc :

$$y(t) = 5{,}5\ \cos\left(628\, t - 2\pi \frac{\Delta t}{T}\right) = 5{,}5\ \cos\left(628\, t - 2\pi \frac{0{,}001}{0{,}01}\right) = 5{,}5\ \cos(628\, t - 20\pi)$$

7- Calculer l'atténuation de dB du filtre

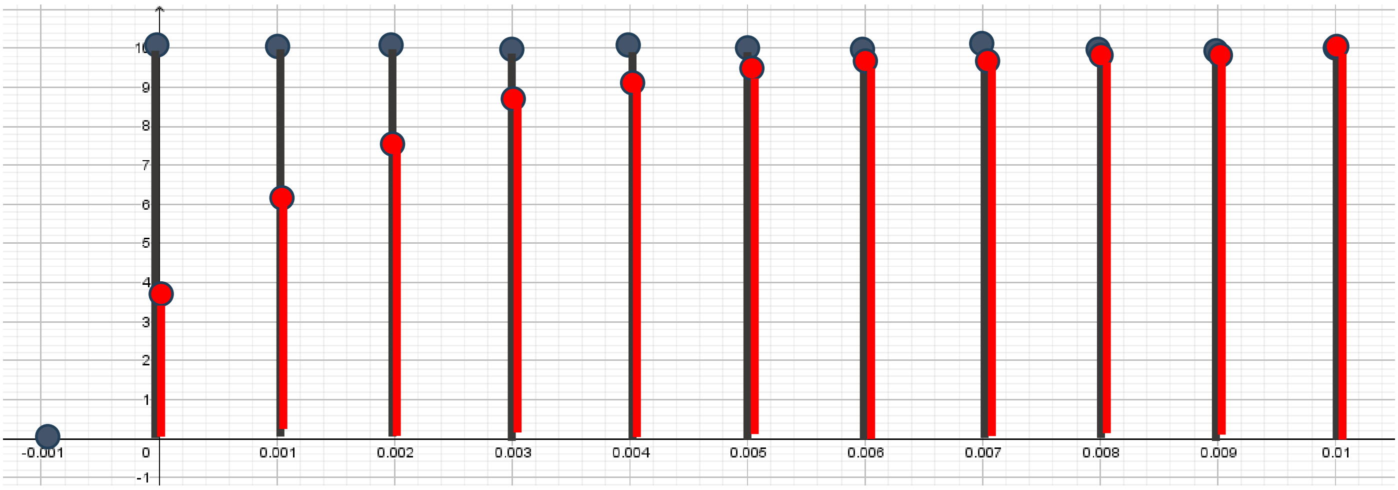
L'atténuation est $20 \log\left(\frac{5{,}5}{10}\right) \approx -5{,}2\ dB$

PARTIE B : Tension d'entrée Echelon $x(t) = 10$ pour $t \geq 0$ et $x(t) = 0$ pour $t < 0$

1- Compléter les lignes t et x_n du tableau ci-dessous :

$\boldsymbol{n}$	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$\boldsymbol{t = n\,T_e}$		0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
$\boldsymbol{x_n}$	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
$\boldsymbol{y_n}$	0											

2- Tracer la courbe représentative du signal d'entrée $x(t)$



3- Calculer les 11 premiers termes de la suite y_n et compléter la ligne y_n du tableau précédent

On a la même relation de récurrence que précédemment. Ici, seul le signal d'entrée est modifié. Le signal de sortie est obtenu par la même équation différentielle. Ainsi la relation de récurrence est conservée :

$$\boldsymbol{y_n = \frac{x_n + 1,6\, y_{n-1}}{2,6}}$$

Pour $n = 0$: $\quad y_0 = \frac{x_0 + 1,6\, y_{-1}}{2,6} = \frac{\mathbf{10+1,6\times 0}}{2,6} = 3,8$

Pour $n = 1$: $\quad y_1 = \frac{x_1 + 1,6\, y_0}{2,6} = \frac{\mathbf{10+1,6\times 3,8}}{2,6} = 6,2$

Pour $n = 2$: $\quad y_2 = \frac{x_2 + 1,6\, y_1}{2,6} = \frac{\mathbf{10+1,6\times 6,2}}{2,6} = 7,7$

Pour $n = 3$: $\quad y_3 = \frac{x_3 + 1,6\, y_2}{2,6} = \frac{\mathbf{10+1,6\times 7,7}}{2,6} = 8,6$

Pour $n = 4$: $\quad y_4 = \frac{x_4 + 1,6\, y_3}{2,6} = \frac{\mathbf{10+1,6\times 8.6}}{2,6} = 9,1$ $\qquad$ etc ....

$\boldsymbol{n}$	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$\boldsymbol{t = n\,T_e}$		0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
$\boldsymbol{x_n}$	0	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
$\boldsymbol{y_n}$	0	3,8	6,2	7,7	8,6	9,1	9,5	9,7	9,8	9,9	9,9	10

4- Tracer la courbe représentative du signal de sortie sur le graphe précédent

On se propose de comparer ces résultats avec ceux obtenus en résolvant l'équation différentielle $\mathbf{0.0016\, y'(t) + y(t) = x(t)}$ issue des lois de l'électricité. Ici, comme $x(t) = 10$, on a à trouver la fonction $y(t)$ solution de $\mathbf{0.0016\, y' + y = 10}$ avec comme condition initiale $y(0) = 0$

5- Déterminer $y(t)$ en résolvant l'équation différentielle

L'E.D. sans second membre est $0{,}0016\, y' + y = 0$. On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions solutions sont du type $y_0(t) = K\, e^{-\frac{b}{a}t}$, soit $y_0(t) = K\, e^{-\frac{1}{0{,}0016}t} = K\, e^{-625t}$

$y_p(t) = A$ est solution de l'E.D. avec second membre $0{,}0016\, y' + y = 10$.

On a $y_p{}'(t) = 0$ car A est une constante. En remplaçant $y_p(t) = A$ dans l'E.D., on obtient :

$$0{,}0016 \times 0 + A = 10$$

Soit : $A = 10$

Finalement : $y_p(t) = 10$

On a donc finalement : $y(t) = y_0(t) + y_p(t) = K\, e^{-625t} + 10$

Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$ doit vérifier :

$$K\, e^{-625\times 0} + 10 = 0$$

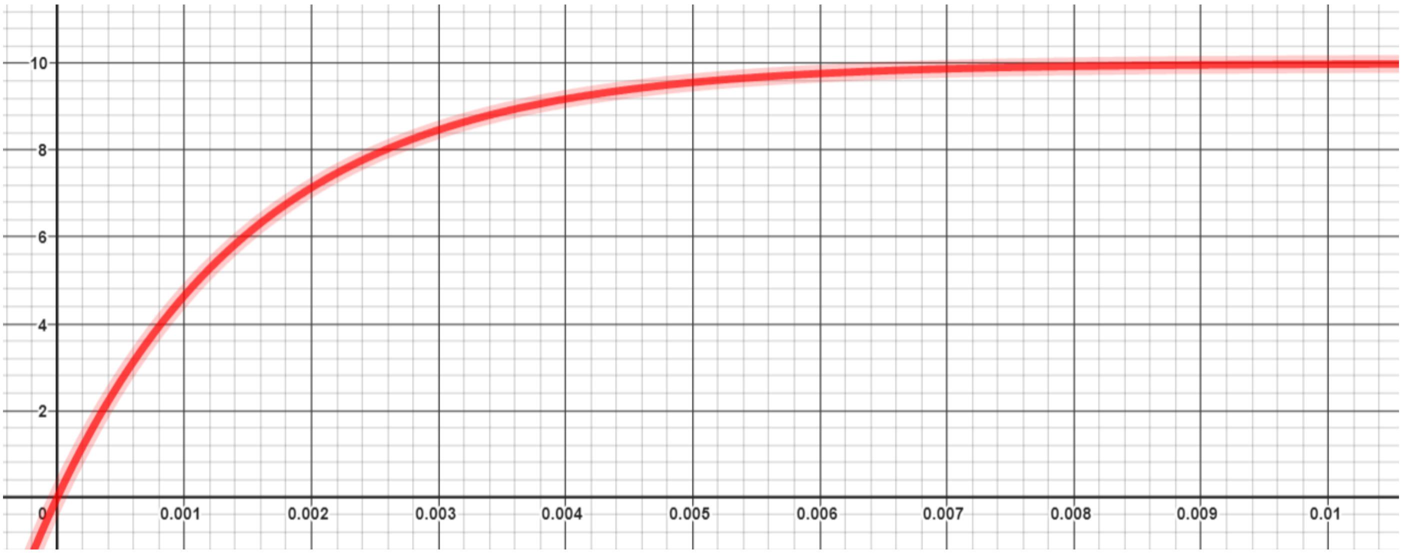
Soit : $K\, e^0 + 10 = 0$

Soit : $K + 10 = 0$

Soit : $K = -10$

Finalement : $y(t) = -10\, e^{-625\, t} + 10$

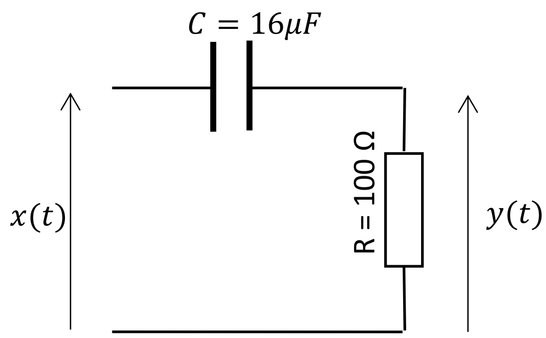
6- Tracer la courbe représentative de $y(t)$ sur le graphe précédent



__Exercice 2__ : *Filtre Passe haut de type RC*

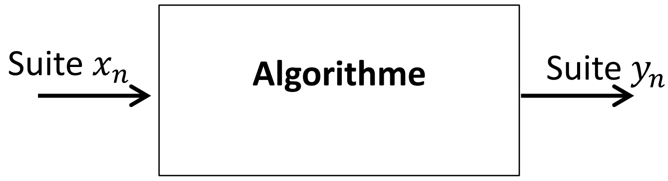
Une tension $x(t)$ est appliquée en entrée d'un filtre analogique. En écrivant les lois électriques, on peut démontrer que la tension de sortie $y(t)$ est la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\mathbf{0.0016\, y'(t) + y(t) = 0.0016\, x'(t)}$$



La tension d'entrée $x(t)$ est une ***rampe*** d'équation $x(t) = 1000\, t$

On désire réaliser un équivalent numérique de ce filtre. Le signal $x(t)$ est échantillonné avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1\,000 Hz$ pour constituer une suite x_n. En sortie de filtre, on retrouve une suite y_n.

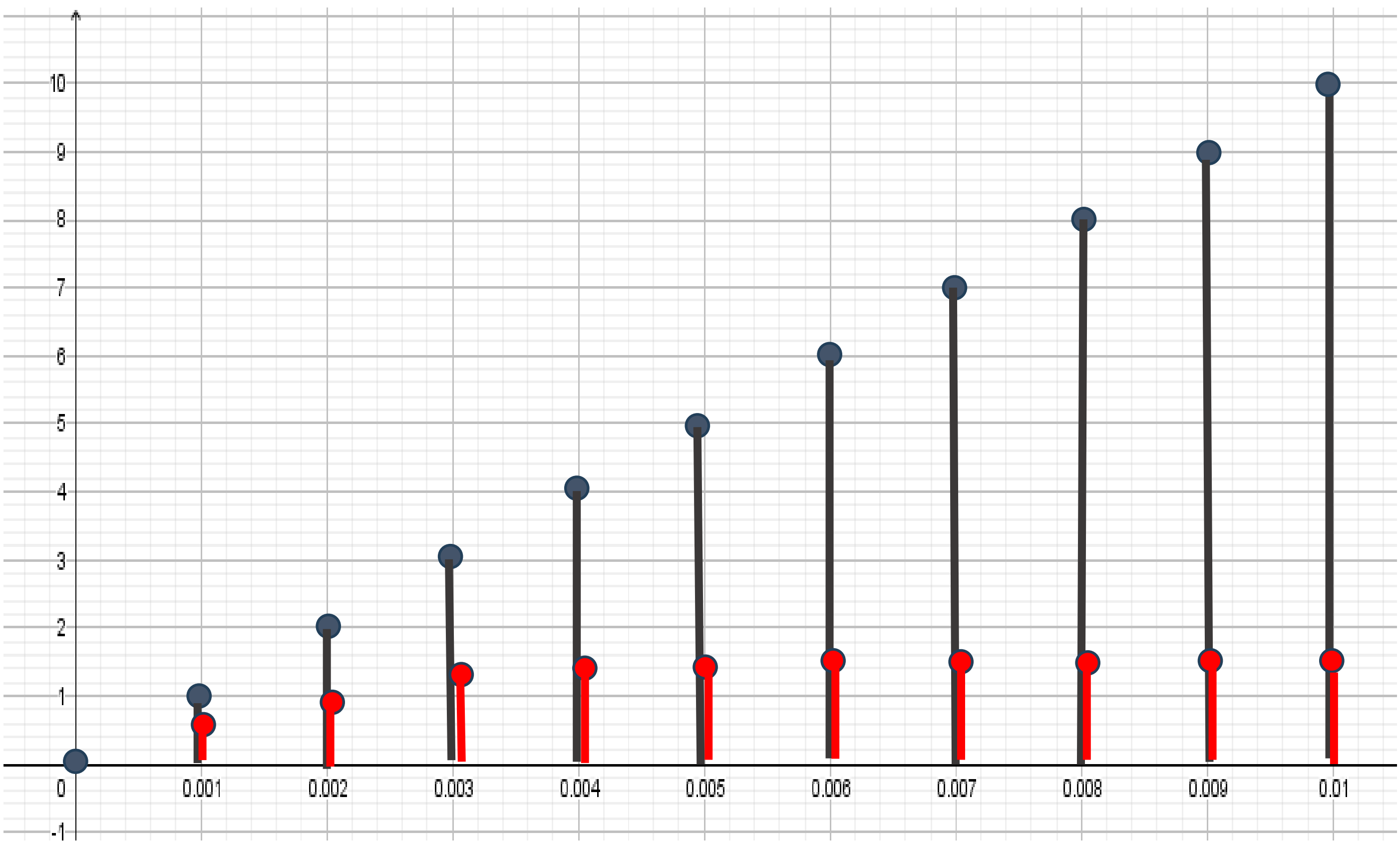


__PARTIE A :__ *Résolution numérique de l'équation différentielle*

1- Calculer la période d'échantillonnage T_e et compléter le tableau ci-dessous : : $T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{1000} = 0{,}001\ s$

$\boldsymbol{n}$	-1	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
$\boldsymbol{t = n\, T_e}$		0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
$\boldsymbol{x_n}$	0	1000 × 0 0	1000 × 0,001 1	1000 × 0,001 2	1000 × 0,001 3	1000 × 0,001 4	1000 × 0,001 5	1000 × 0,001 6	1000 × 0,001 7	1000 × 0,001 8	1000 × 0,001 9	1000 × 0,001 10
$\boldsymbol{y_n}$	0											

2- Tracer la courbe représentative du signal d'entrée $x(t)$



3- Déterminer la relation de récurrence donnant y_n en fonction de x_n ; x_{n-1} et y_{n-1}

L'E.D. est : $0{,}0016\, y'(t) + y(t) = 0{,}0016 x'(t)$

En travaillant sur les signaux échantillonnés :

$$0.0016\,\frac{(y_n - y_{n-1})}{0{,}001} + y_n = 0.0016\,\frac{(x_n - x_{n-1})}{0{,}001}$$

Ce qui donne :

$$\frac{0.0016}{0{,}001}(y_n - y_{n-1}) + y_n = \frac{0.0016}{0{,}001}(x_n - x_{n-1})$$

$$1{,}6\,(y_n - y_{n-1}) + y_n = 1{,}6\,(x_n - x_{n-1})$$

$$1{,}6\,y_n - 1{,}6\,y_{n-1} + y_n = 1{,}6\,(x_n - x_{n-1})$$

$$2{,}6\,y_n - 1{,}6\,y_{n-1} = 1{,}6\,(x_n - x_{n-1})$$

$$2{,}6\,y_n = 1{,}6\,(x_n - x_{n-1}) + 1{,}6\,y_{n-1}$$

Et finalement :

$$y_n = \frac{1{,}6\,(x_n - x_{n-1} + y_{n-1})}{2{,}6}$$

$$\boldsymbol{y_n = \frac{1,6}{2,6}\,(x_n - x_{n-1} + y_{n-1})}$$

4- Calculer les 11 premiers termes de la suite y_n et compléter la ligne y_n du tableau précédent

Pour $n = 0$: $y_0 = \frac{1{,}6}{2{,}6}(x_0 - x_{-1} + y_{-1}) = \frac{1{,}6}{2{,}6}(0 - 0 + 0) = 0$

Pour $n = 1$: $y_1 = \frac{1{,}6}{2{,}6}(x_1 - x_0 + y_0) = \frac{1{,}6}{2{,}6}(1 - 0 + 0) = 0{,}62$

Pour $n = 2$: $y_2 = \frac{1{,}6}{2{,}6}(x_2 - x_1 + y_1) = \frac{1{,}6}{2{,}6}(2 - 1 + 0{,}62) = 0{,}99$

Pour $n = 3$: $y_3 = \frac{1{,}6}{2{,}6}(x_3 - x_2 + y_2) = \frac{1{,}6}{2{,}6}(3 - 2 + 0{,}99) = 1{,}23$

Pour $n = 4$: $y_4 = \frac{1{,}6}{2{,}6}(x_4 - x_3 + y_3) = \frac{1{,}6}{2{,}6}(4 - 3 + 1{,}23) = 1{,}37$

Pour $n = 5$: $y_5 = \frac{1{,}6}{2{,}6}(x_5 - x_4 + y_4) = \frac{1{,}6}{2{,}6}(5 - 4 + 1{,}37) = 1{,}46$ etc ....

n	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t = n\,T_e$		0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010
x_n	0	1000×0 0	$1000 \times 0{,}001$ 1	$1000 \times 0{,}001$ 2	$1000 \times 0{,}001$ 3	$1000 \times 0{,}001$ 4	$1000 \times 0{,}001$ 5	$1000 \times 0{,}001$ 6	$1000 \times 0{,}001$ 7	$1000 \times 0{,}001$ 8	$1000 \times 0{,}001$ 9	$1000 \times 0{,}001$ 10
y_n	0	0	0,62	0,99	1,23	1,37	1,46	1,51	1,55	1,57	1,58	1,59

5- Tracer la courbe représentative du signal de sortie sur le graphe précédent

PARTIE B : *Résolution mathématique de l'équation différentielle*

La tension d'entrée est une fonction d'expression : $x(t) = 1000\,t$. On a donc : $x'(t) = 1000$ et l'équation différentielle issue des lois de l'électricité devient : $0.0016\,y'(t) + \mathrm{y(t)} = 0.0016 \times 1000$
soit : $0.0016\,y'(t) + \mathrm{y(t)} = 1.6$ avec comme CI : $y(0) = 0$

1- Déterminer la fonction $y(t)$ solution de l'équation différentielle précédente

L'E.D. sans second membre est $0{,}0016\,y' + y = 0$. On a une E.D. du type $ay' + by = 0$. Les fonctions solutions sont du type $y_0(t) = K\,e^{-\frac{b}{a}t}$, soit $y_0(t) = K\,e^{-\frac{1}{0{,}0016}t} = K\,e^{-625t}$

$y_p(t) = A$ est solution de l'E.D. avec second membre $0{,}0016\,y' + y = 1{,}6$.

On a $y_p{}'(t) = 0$ car A est une constante. En remplaçant $y_p(t) = A$ dans l'E.D., on obtient :

$$0{,}0016 \times 0 + A = 1{,}6$$

Soit : $A = 1{,}6$

Finalement : $y_p(t) = 1{,}6$

On a donc finalement : $y(t) = y_0(t) + y_p(t) = K\,e^{-625t} + 1{,}6$
Parmi toutes ces fonctions, la seule qui respecte la condition initiale $y(0) = 0$ doit vérifier :
$K\,e^{-625\times 0} + 1{,}6 = 0$
Soit : $K\,e^{0} + 1{,}6 = 0$
Soit : $K + 1{,}6 = 0$
Soit : $K = -1{,}6$

Finalement : $y(t) = -1{,}6\,e^{-625\,t} + 1{,}6$

2- Tracer sur le graphe précédent, la courbe représentative de la fonction y pour $0 < t < 0.01$