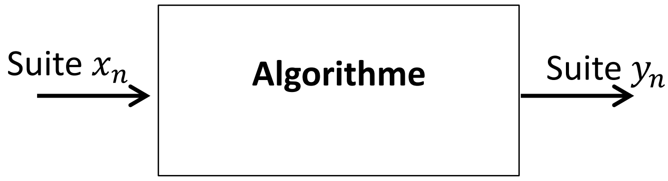
DS – BTS SN TRANSFORMEE EN Z

Partie 1 : *Fonction de transfert*



Un filtre numérique permet de transformer un signal x_n en un signal y_n . L'équation de récurrence de l'algorithme de ce filtre est : $\boldsymbol{y_n = x_n + 0,5\, y_{n-1}}$

Q1. Appliquer la transformée en Z sur chacun des membres de l'équation et montrer précisément que l'expression de la fonction de transfert $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ en fonction de z est : $H(z) = \frac{z}{z-0,5}$

On applique la transformée en Z sur la relation de récurrence : $y_n = x_n + 0,5\, y_{n-1}$

On obtient : $Y(z) = X(z) + 0,5 \times \frac{1}{z} \times Y(z)$

On a donc : $Y(z) = X(z) + \frac{0,5}{z} \times Y(z)$

$$Y(z) - \frac{0,5}{z} Y(z) = X(z)$$

$$Y(z) \times \left(1 - \frac{0,5}{z}\right) = X(z)$$

$$Y(Z) \times \left(\frac{z-0,5}{z}\right) = X(z)$$

$$Y(z) = X(z) \times \frac{z}{z-0,5}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{z}{z-0,5}$$

Partie 2 : *Entrée x_n* ***impulsion***

Une entrée Impulsion est appliquée. Le signal x_n est : $\{x_n\} = \{1\,;0\,;0\,;0\,;\ldots.\}$

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n < 0}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\boldsymbol{x_n}$	0	1	0	0	0	0
$\boldsymbol{y_n}$ **avec récurrence**	0	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

Q2. Compléter la ligne «y_n avec récurrence » du tableau ci-dessus en utilisant la relation de récurrence. Détailler le calcul de y_0 , y_1 et y_2.

On a : $y_0 = x_0 + 0,5\, y_{-1} = 1 + 0,5 \times 0 = 1$

$$y_1 = x_1 + 0,5\, y_0 = 0 + 0,5 \times 1 = 0,5$$

$$y_2 = x_2 + 0,5\, y_1 = 0 + 0,5 \times 0,5 = 0,25$$

On recherche à présent le signal y_n en utilisant les transformées en Z. Pour cela :

Q3. Donner $\mathrm{X(Z)}$ pour une entrée Impulsion et calculer : $\mathrm{Y(Z)}$

$\mathrm{X(z)} = 1$ pour un signal impulsion. On a donc $\mathrm{Y(z) = H(z) \times X(z)} = \frac{z}{z-0,5}$

Q4. Déterminer le signal original y_n de $\mathrm{Y(Z)}$ en appliquant la transformée en Z inverse. Utiliser la relation trouvée pour compléter la ligne « y_n avec Transformée en Z » du tableau suivant. Détailler le calcul de $\mathrm{y_0}$, $\mathrm{y_1}$ et $\mathrm{y_4}$.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n<0}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\boldsymbol{y_n}$ **avec Transformée en Z**	0	1	0,5	0,25	0,125	0,0625

Les résultats obtenus par récurrence sont-ils cohérents avec ceux obtenus ici ?

On a : $\mathrm{Y(z)} = \frac{z}{z-0{,}5}$

On a une relation du type $\frac{z}{z-a}$ avec $a = 0{,}5$. Le signal original y_n de $\mathrm{Y(z)}$ est donc : $\boldsymbol{y_n = 0,5^n\, e_n}$

On détaille le calcul des premières valeurs : $y_0 = 0{,}5^0\, e_0 = 1 \times 1 = 1$

$$y_1 = 0{,}5^1\, e_1 = 0{,}5 \times 1 = 0{,}5$$

$$y_4 = 0{,}5^4\, e_4 = 0{,}0625 \times 1 = 0{,}0625$$

Les résultats obtenus par récurrence identiques sont à ceux obtenus ici.

<u>Partie 3</u> : *Entrée* $x_n = 5\, d_{n-2}$

On suppose à présent que le signal $\mathrm{x_n}$ est un dirac retardé : $\{\mathrm{x_n}\} = \{0\,;0\,;5\,;0\,;\ 0\,;\ldots.\}$.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n<0}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\boldsymbol{x_n}$	0	0	0	5	0	0
$\boldsymbol{y_n}$ **avec récurrence**	0	0	0	5	2,5	1,25

Q5. Compléter la ligne «y_n avec récurrence » du tableau ci-dessus en utilisant la relation de récurrence.

Q6. Déterminer à présent ce signal y_n en appliquant la méthode de transformée en Z :

a- Déterminer $X(Z)$: $X(z) = 5 \times \frac{1}{z^2}$

b- En déduire $Y(Z)$: $\mathrm{Y(z) = H(z) \times X(z)} = \frac{z}{z-0{,}5} \times \frac{5}{z^2} = 5 \times \frac{z}{z-0{,}5}\,\frac{1}{z^2}$

c- Déterminer l'expression $y_n$de l'original : On a une relation du type $\frac{z}{z-a}$ avec $a = 0{,}5$ et un retard $\frac{1}{z^2}$.

Finalement : $\boldsymbol{y_n = 5\ \times 0,5^{n-2}\, e_{n-2}}$

d- Compléter la ligne « y_n avec Transformée en Z » du tableau suivant.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n<0}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\boldsymbol{y_n}$ **avec Transformée en Z**	0	0	0	5	2,5	1,25

Partie 4 : *Entrée x_n* ***échelon***

On suppose que le signal x_n est un échelon : $\{e_n\} = \{1 ; 1 ; 1 ; 1 ; \dots.\}$.

n	$n < 0$	0	1	2	3	4
x_n	0	1	1	1	1	1
y_n **avec récurrence**	0	1	1,5	1,75	1,875	1,9375

Q7. Compléter la ligne «y_n avec récurrence » du tableau ci-dessus en utilisant la relation de récurrence. Détailler le calcul de y_0 , y_1 et y_2.

On a : $y_0 = x_0 + 0{,}5\, y_{-1} = 1 + 0{,}5 \times 0 = 1$

$y_1 = x_1 + 0{,}5\, y_0 = 1 + 0{,}5 \times 1 = 1{,}5$

$y_2 = x_2 + 0{,}5\, y_1 = 1 + 0{,}5 \times 1{,}5 = 1{,}75$

On recherche à présent le signal y_n en utilisant les transformées en Z. Pour cela :

Q8. Donner $\mathrm{X(Z)}$ pour une entrée Echelon et calculer : $\mathrm{Y(Z)}$

$\mathrm{X(z)} = \frac{z}{z-1}$ pour un signal échelon. On a donc $\mathrm{Y(z)} = \mathrm{H(z)} \times \mathrm{X(z)} = \frac{z}{z-0{,}5} \times \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-0{,}5)(z-1)}$

Q9. Afin de trouver l'original y_n de $\mathrm{Y(Z)}$, trouver les nombres A et B pour que l'égalité suivante soit toujours vraie : $\frac{A\,z}{z-0{,}5} + \frac{B\,z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-0{,}5)(z-1)}$

On a :

$$\frac{A\,z}{z-0{,}5} + \frac{B\,z}{z-1} = \frac{A\,z\,(z-1)}{(z-0{,}5)(z-1)} + \frac{B\,z\,(z-0{,}5)}{(z-1)(z-0{,}5)}$$

$$= \frac{A\,z^2 - A\,z}{(z-0{,}5)(z-1)} + \frac{B\,z^2 - 0{,}5B\,z}{(z-1)(z-0{,}5)}$$

$$= \frac{z^2(A+B) + z(-A-0{,}5B)}{(z-0{,}5)(z-1)}$$

Pour avoir l'égalité souhaitée, on doit avoir : $A + B = 1$ et $-A - 0{,}5B = 0$

La deuxième relation donne : $A = -0{,}5\,B$

En remplaçant dans la première relation, on obtient $A + B = 1$, soit $-0{,}5B + B = 1$, soit $0{,}5\,B = 1$, soit $B = \frac{1}{0{,}5} = 2$

La deuxième relation donne alors : $A = -0{,}5\,B = -0{,}5 \times 2 = -1$

On a finalement $A = -1$ et $B = 2$. Donc :

$$\frac{z^2}{(z-0{,}5)(z-1)} = \frac{A\,z}{z-0{,}5} + \frac{B\,z}{z-1} = \frac{-\,z}{z-0{,}5} + \frac{2\,z}{z-1}$$

Q10. Déterminer le signal original y_n de $\mathrm{Y(Z)}$ en appliquant la transformée en Z inverse. Utiliser la relation trouvée pour compléter la ligne « y_n avec Transformée en Z » du tableau suivant. Détailler le calcul de y_0 , y_1 et y_4.

n	$n < 0$	0	1	2	3	4
y_n **avec Transformée en Z**	0	1	1,5	1,75	1,875	1,9375

On a :

$$Y(z) = \frac{-z}{z-0{,}5} + \frac{2\,z}{z-1} = \;-1\;\frac{z}{z-0{,}5} + \;2\;\frac{z}{z-1}$$

On a une relation du type $\frac{z}{z-a}$ avec $a = 0{,}5$ et une relation du type $\frac{z}{z-1}$

Le signal original y_n de $\mathrm{Y(z)}$ est donc : $\boldsymbol{y_n = -\,0,5^n\;e_n + 2\;e_n = (2 -\,0,5^n\,)e_n}$

On détaille le calcul des premières valeurs : $y_0 = (-0{,}5^0\;+2)\;e_0 = (-1+2)\times 1 = 1$

$y_1 = (-0{,}5^1\;+2)\;e_0 = (-0{,}5+2)\times 1 = 1{,}5$

$y_4 = (-0{,}5^4\;+2)\;e_0 = (-0{,}0625+2)\times 1 = 1{,}9375$

Les résultats obtenus par récurrence sont identiques à ceux obtenus ici.