TD – BTS – SN

TRANSFORMEE EN Z

EXERCICE 1 : *Transformées en Z des signaux de référence*

1- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 2\, e_n$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.

2- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 5\, e_{n-1}$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.

3- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 10\, e_{n-2}$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.

4- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 3\, d_n$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.

5- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 5\, d_{n-2}$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.

6- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 2\, e_n - 2e_{n-2}$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.

7- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 0.1^n\, e_n$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.

8- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 2^{n-1}\, e_{n-1}$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.

9- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 0.9^{n-2}\, e_{n-2}$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.

EXERCICE 2 : *Appliquer la transformation en Z sur une relation de récurrence :*

1- Un filtre numérique est défini par la relation de récurrence : $y_n = x_n + a\, y_{n-1}$; a étant une constante réelle. Déterminer la fonction de transfert $H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$ de ce filtre en fonction de a

2- Un filtre est défini par la relation de récurrence : $y_n = 0{,}04\, x_{n-1} + y_{n-2}$. Déterminer la fonction de transfert $H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$

3- Un filtre est défini par la relation de récurrence : $11y_n - 10y_{n-1} = x_n$. Déterminer la fonction de transfert $H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$

4- Un filtre est défini par la relation de récurrence : $y_n - 5y_{n-1} = 7x_n$. Déterminer la fonction de transfert $H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$

5- Soit y_n le signal causal vérifiant pour tout n : $y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2} = d_n$; d_n étant le signal impulsion unité : $d_0 = 1$ et $d_n = 0$ si $n \neq 0$. On note $Y(Z)$ la transformée en Z de y_n.
   a. Calculer à partir de la relation de récurrence : y_0 ; y_1 ; y_2 ; y_3 ; y_4
   b. Calculer $Y(Z)$

6- Soit y_n le signal causal vérifiant pour tout n : $y_n - 2y_{n-1} = e_n$; e_n étant le signal échelon unité : $e_n = 1$ si $n \geq 0$ et $e_n = 0$ si $n < 0$. On note $Y(Z)$ la transformée en Z de y_n.
   a. Calculer à partir de la relation de récurrence : y_0 ; y_1 ; y_2 ; y_3 ; y_4
   b. Calculer $Y(Z)$

__EXERCICE 3 :__ Transformée en Z inverse : trouver l'original y_n de $Y(Z)$

1- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{3z}{(z+1)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

2- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{3z}{(z+1)} + \frac{5z}{(z-1)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

3- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{3z}{(5\,z-10)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

4- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{2z}{(10\,z+130)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

5- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{3z}{(2z+4)} + \frac{5z}{(10z-1)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

6- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{1}{(z-5)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

7- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{5}{(2z-10)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

8- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{1}{z\,(4z-8)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

9- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{z}{(z-2)} + \frac{1}{z\,(z-0.1)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

10- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{2\,z}{(z-2)(z-1)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

EXERCICE 4 : Simplification d'une fraction en éléments simples

1- Trouver A et B tel que : $\dfrac{z}{(11\,z-10)(z-1)} = \dfrac{A}{z-1} + \dfrac{B}{(11\,z-10)}$

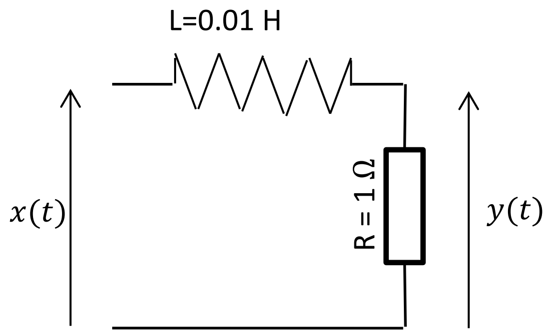
2- Trouver A et B tel que : $\dfrac{z}{(3\,z-2)(z-1)} = \dfrac{A}{3z-2} + \dfrac{B}{z-1}$

3- Trouver A et B tel que : $\dfrac{z^2}{(5\,z+2)(z+1)} = \dfrac{Az}{5z+2} + \dfrac{Bz}{z+1}$

4- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \dfrac{2\,z}{(z-2)(z-1)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

5- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \dfrac{2}{(z-2)(z-1)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

EXERCICE 5 : *Utilisation de la transformée en Z sur un problème complet de filtre*



On désire réaliser un équivalent numérique d'un filtre analogique. La tension d'entrée de ce filtre est $x(t)$. On récupère une tension $y(t)$ en sortie, aux bornes de la résistance R.

L'équation différentielle liant $y(t)$ et $x(t)$ est la suivante :

$$x(t) = \frac{L}{R}\,\frac{d\,y(t)}{dt} + y(t)$$

Avec $R = 1\,\Omega$ et $L = 0.01\,H$. On a : $x(t) = 0.01\,\frac{d\,y(t)}{dt} + y(t)$

On réalise un équivalent numérique de ce filtre :

On fixe pour simplifier, la période d'échantillonnage à : $T_E = 0.001\,s$

1- Montrer que l'équation de récurrence de l'algorithme est : $y_n = \dfrac{1}{11}\,(x_n + 10\,y_{n-1})$

2- On suppose que la suite x_n est une suite échelon : $\{x_n\} = \{1\,;1\,;1\,;1\,;\dots\}$. Utiliser la formule de récurrence pour déterminer les 5 premiers termes de la suite y_n. On arrondira les valeurs à 0.01 près.

n	$n < 0$	0	1	2	3	4
t et s	$t < 0$					
x	0	1	1	1	1	1
y_n avec récurrence	0					
y_n avec transformée en Z						

3- Soit $H(z)$ la fonction de transfert de ce filtre.

⇨ Montrer que : $H(z) = \frac{z}{11\, z - 10}$

4- Une entrée Impulsion est appliquée. La suite x_n est : $\{x_n\} = \{1\,;0\,;0\,;0\,;\ldots.\}$. Donner $X(Z)$ et calculer : $Y(Z)$

5- En appliquant la transformée en Z inverse, montrer que la relation exprimant y_n en fonction de n est : $y_n = \frac{1}{11}\,(\frac{10}{11})^n\, e_n$

6- Une entrée Echelon est appliquée à présent. La suite x_n est : $\{x_n\} = \{1\,;1\,;1\,;1\,;\ldots.\}$. Donner $X(Z)$ et calculer : $Y(Z)$

7- Montrer que $Y(Z)$ peur s'écrire sous la forme suivante : $Y(Z) = \frac{z}{z-1} + \frac{-10\, z}{(11\, z-10)}$.
En appliquant la transformée en Z inverse, montrer que la relation exprimant y_n en fonction de n est : $y_n = (1 - \frac{10}{11}\left(\frac{10}{11}\right)^n\Big)\, e_n$ .Utiliser cette relation pour calculer les 5 premiers termes de la suite en complétant la dernière ligne du tableau précédent.

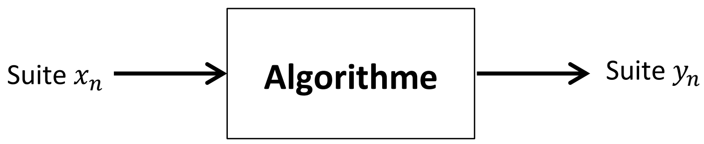
<u>EXERCICE 6 :</u> *Utilisation de la transformée en Z sur un problème complet de filtre*

La tension d'entrée de ce filtre est $x(t)$. On récupère une tension $y(t)$ en sortie, aux bornes de la résistance R.L'équation différentielle liant $x(t)$ et $y(t)$ est la suivante :

$$RC\,\frac{d\,x(t)}{dt} = RC\,\frac{d\,y(t)}{dt} + y(t)$$

Avec $R = 2\;10^4\;\Omega$ et $C = 15.10^{-9}$ F . On a ainsi : $\mathbf{0.0003}\,\frac{\boldsymbol{d\,x(t)}}{\boldsymbol{dt}} = \mathbf{0.0003}\,\frac{\boldsymbol{d\,y(t)}}{\boldsymbol{dt}} + \boldsymbol{y(t)}$

On réalise un équivalent numérique de ce filtre :



On fixe pour simplifier, la période d'échantillonnage à : $T_E = 10\,\mu s = 10^{-5}\, s$

1- Montrer que l'équation de récurrence de l'algorithme est : $y_n = \frac{30}{31}\,(x_n - x_{n-1} + y_{n-1})$

2- On suppose que la suite x_n est une suite échelon : $\{x_n\} = \{1\,;1\,;1\,;1\,;\ldots.\}$. Utiliser la formule de récurrence pour déterminer les 5 premiers termes de la suite x_n. On arrondira les valeurs à 0.01 près.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n < 0}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
t en μs	$t < 0$	10				
$\boldsymbol{x_n}$	0	1	1	1	1	1
y_n avec récurrence	0					
y_n avec transformée en Z						

3- Soit $H(z)$ la fonction de transfert de ce filtre.

⇨ Montrer que : $H(z) = \frac{30(z-1)}{31\,z - 30}$

4- Une entrée Echelon est appliquée. La suite x_n est : $\{x_n\} = \{1\,;1\,;1\,;1\,;\ldots.\}$. Donner $X(Z)$ et montrer que : $Y(Z) = \frac{30\,z}{31\,z - 30}$

5- En appliquant la transformée en Z inverse, montrer que la relation exprimant y_n en fonction de n est : $y_n = \frac{30}{31}\,(\frac{30}{31})^n$ .Utiliser cette relation pour calculer les 5 premiers termes de la suite en complétant la dernière ligne du tableau précédent.

6- On suppose que la suite x_n est une suite dirac : $\{x_n\} = \{1\,;0\,;0\,;0\,;\ldots.\}$. Utiliser la formule de récurrence pour déterminer les 5 premiers termes de la suite x_n. On arrondira les valeurs à 0.01 près.

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{n < 0}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\boldsymbol{t}$ **en** $\boldsymbol{\mu s}$	$t < 0$	10				
$\boldsymbol{x_n}$	0	1	0	0	0	0
$\boldsymbol{y_n}$ **avec récurrence**	0					
$\boldsymbol{y_n}$ **avec transformée en Z**						

7- Calculer $Y(z)$

8- En appliquant la transformée en Z inverse, déterminer la relation exprimant y_n en fonction de n et compléter la dernière ligne du tableau précédent.

<u>EXERCICE 7 :</u> Un moteur asynchrone alimenté par un onduleur, est asservi numériquement en vitesse. Le cadencement de calcul se fait à une fréquence fe = 20 kHz et le système étudié est identifiable à un système du second ordre numérique modélisable par l'équation de récurrence suivante :

$$\boldsymbol{y_n = 1.921\,y_{n-1} - 0.9238\,s_{y-2} + 0.0028\,x_n}$$

où x_n et y_n correspondent respectivement aux valeurs, à l'instant n T_E de la consigne et de la fréquence de rotation du moteur toutes deux exprimées en tr/mn.

1- Déterminer la fonction de transfert $H(z) = \frac{Y(z)}{X(Z)}$

2- Une entrée échelon est appliquée. A partir du temps $t = 0$, on a : $e(t) = 12\,V$. Donner $X(Z)$ et calculer : $Y(Z)$

3- Une entrée impulsion est appliquée. $\{x_n\} = \{12\,;0\,;0\,;0\,;\ldots\}$. Donner $X(Z)$ et calculer : $Y(Z)$