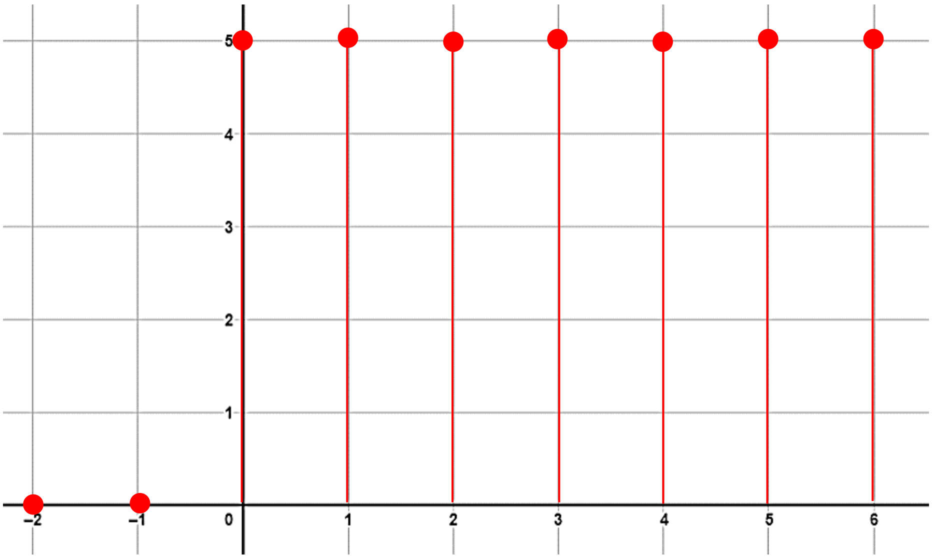
TRANSFORMEE EN Z

<u>EXERCICE 1 :</u> *Transformées en Z des signaux de référence*

1- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 5\, e_n$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.



$x_{-2} = 5\ e_{-2} = 5 \times 0 = 0$

$x_{-1} = 5\ e_{-1} = 5 \times 0 = 0$

$x_0 = 5\ e_0 = 5 \times 1 = 5$

$x_1 = 5\ e_1 = 5 \times 1 = 5$

$x_2 = 5\ e_2 = 5 \times 1 = 5$

$x_3 = 5\ e_3 = 5 \times 1 = 5$

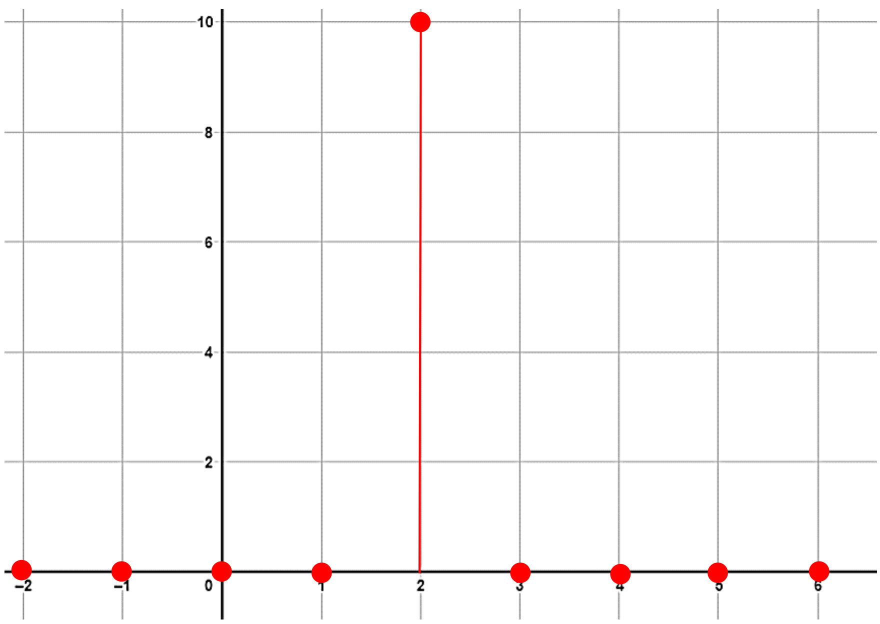
$x_4 = 5\ e_4 = 5 \times 1 = 5$

$x_5 = 5\ e_5 = 5 \times 1 = 5$

$x_6 = 5\ e_6 = 5 \times 1 = 5$

La transformée en Z du signal est : $X(z) = 5\ \frac{z}{z-1}$

2- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 10\, d_{n-2}$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.



$x_{-2} = 10\ d_{-4} = 10 \times 0 = 0$

$x_{-1} = 10\ d_{-3} = 10 \times 0 = 0$

$x_0 = 10\ d_{-2} = 10 \times 0 = 10$

$x_1 = 10\ d_{-1} = 10 \times 0 = 0$

$x_2 = 10\ d_0 = 10 \times 1 = 10$

$x_3 = 10\ d_1 = 10 \times 0 = 0$

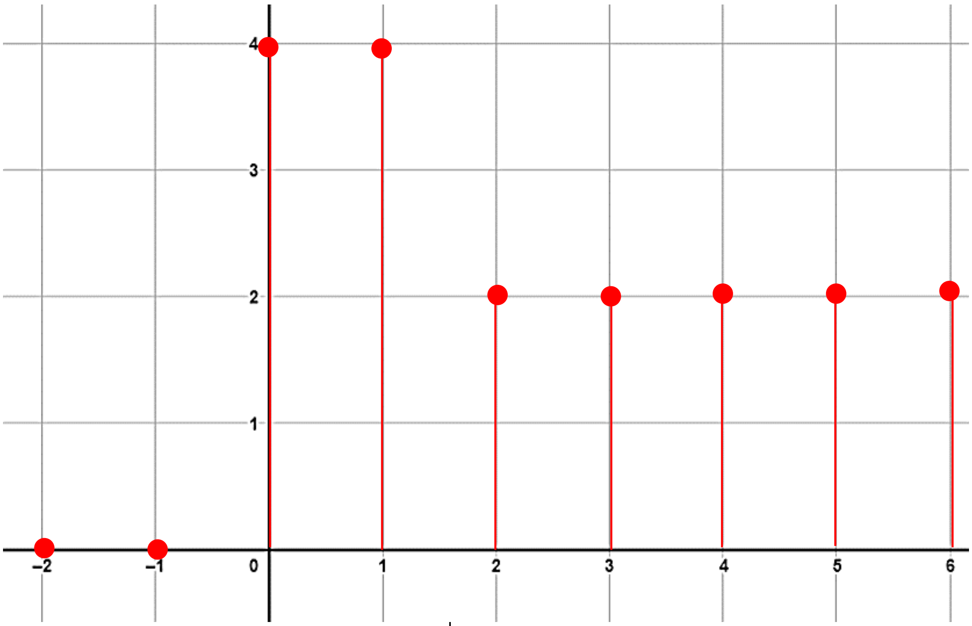
$x_4 = 10\ d_2 = 10 \times 0 = 0$

$x_5 = 10\ d_3 = 10 \times 0 = 0$

$x_6 = 10\ d_4 = 10 \times 0 = 0$

La transformée en Z du signal est : $X(z) = 10\ \times 1 \times \frac{1}{z^2} = \frac{10}{z^2}$

3- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 4\,e_n - 2e_{n-2}$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.



$x_{-2} = 4\,e_{-2} - 2e_{-4} = 4 \times 0 - 2 \times 0 = 0$

$x_{-1} = 4\,e_{-1} - 2e_{-3} = 4 \times 0 - 2 \times 0 = 0$

$x_0 = 4\,e_0 - 2e_{-2} = 4 \times 1 - 2 \times 0 = 4$

$x_1 = 4\,e_1 - 2e_{-1} = 4 \times 1 - 2 \times 0 = 4$

$x_2 = 4\,e_2 - 2e_0 = 4 \times 1 - 2 \times 1 = 2$

$x_3 = 4\,e_3 - 2e_1 = 4 \times 1 - 2 \times 1 = 2$

$x_4 = 4\,e_4 - 2e_2 = 4 \times 1 - 2 \times 1 = 2$

$x_5 = 4\,e_5 - 2e_3 = 4 \times 1 - 2 \times 1 = 2$

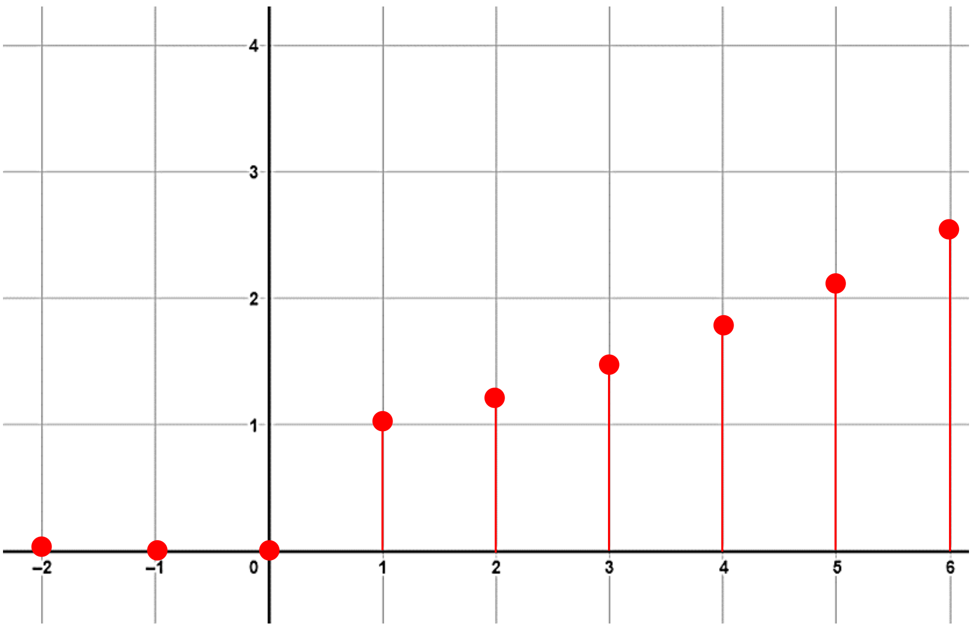
$x_6 = 4\,e_6 - 2e_4 = 4 \times 1 - 2 \times 1 = 2$

La transformée en Z du signal est : $X(z) = 4\,\frac{z}{z-1} - 2\,\frac{z}{z-1} \times \frac{1}{z^2}$

Après simplification, cela donne :

$$X(z) = 4\,\frac{z}{z-1} - \frac{2}{z(z-1)}$$

4- Soit le signal causal (x_n) défini par : $x_n = 1{,}2^{n-1}\,e_{n-1}$. Représenter graphiquement le signal (x_n) pour $-2 \leq n \leq 6$. Donner l'expression de $X(z)$.



$x_{-2} = 1{,}2^{-3}\,e_{-3} = 1{,}2^{-3} \times 0 = 0$

$x_{-1} = 1{,}2^{-2}\,e_{-2} = 1{,}2^{-2} \times 0 = 0$

$x_0 = 1{,}2^{-1}\,e_{-1} = 1{,}2^{-1} \times 0 = 0$

$x_1 = 1{,}2^{0}\,e_0 = 1 \times 1 = 1$

$x_2 = 1{,}2^{1}\,e_1 = 1{,}2^{1} \times 1 = 1{,}2$

$x_3 = 1{,}2^{2}\,e_2 = 1{,}2^{2} \times 1 = 1{,}44$

$x_4 = 1{,}2^{3}\,e_3 = 1{,}2^{3} \times 1 \approx 1{,}73$

$x_5 = 1{,}2^{4}\,e_4 = 1{,}2^{4} \times 1 \approx 2{,}07$

$x_6 = 1{,}2^{5}\,e_5 = 1{,}2^{5} \times 1 \approx 2{,}49$

La transformée en Z du signal est : $X(z) = \frac{z}{z-1{,}2} \times \frac{1}{z} = \frac{1}{z-1{,}2}$

<u>EXERCICE 2 :</u> *Appliquer la transformation en Z sur une relation de récurrence :*

Suite x_n $\longrightarrow$ **Algorithme** $\longrightarrow$ Suite y_n

1- Un filtre est défini par la relation de récurrence : $5y_n - 3y_{n-1} = x_n$. Déterminer la fonction de transfert $H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$

On applique la transformée en Z sur la relation de récurrence : $5y_n - 3y_{n-1} = x_n$

On obtient : $5\,Y(z) - 3 \times \frac{1}{z} \times Y(z) = X(z)$

On a donc : $5\,Y(z) - \frac{3}{z}\,Y(z) = X(z)$

$$Y(z) \times \left(5 - \frac{3}{z}\right) = X(z)$$

$$Y(z) \times \left(\frac{5z}{z} - \frac{3}{z}\right) = X(z)$$

$$Y(Z) \times \left(\frac{5\,z - 3}{z}\right) = X(z)$$

$$Y(z) = X(z) \times \frac{z}{5z - 3}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{z}{5\,z - 3}$$

2- Soit y_n le signal causal vérifiant pour tout n : $y_n - 2y_{n-1} = e_n$; e_n étant le signal échelon unité : $e_n = 1$ si $n \geq 0$ et $e_n = 0$ si $n < 0$. On note $Y(Z)$ la transformée en Z de y_n. Calculer $Y(Z)$

On applique la transformée en Z sur la relation de récurrence $y_n - 2y_{n-1} = e_n$

On obtient : $Y(z) - 2 \times \frac{1}{z} \times Y(z) = \frac{z}{z-1}$

On a donc : $Y(z) - \frac{2}{z}\,Y(z) = \frac{z}{z-1}$

$$Y(z) \times \left(1 - \frac{2}{z}\right) = \frac{z}{z - 1}$$

$$Y(Z) \times \left(\frac{z - 2}{z}\right) = \frac{z}{z - 1}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z - 1} \times \frac{z}{z - 2}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{z^2}{(z - 1)(z - 2)}$$

EXERCICE 3 : Transformée en Z inverse : trouver l'original y_n de $Y(Z)$

1- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{3z}{(5\,z-10)}$ Déterminer l'expression y_n de l'original du signal de sortie

On a : $\mathrm{Y(z)} = \frac{3\,z}{5z-10} = \frac{3\,z}{5\,(z-2)} = \frac{3}{5} \times \frac{z}{z-2} = 0{,}6\ \frac{z}{z-2}$

On a une relation du type $\frac{z}{z-a}$ avec $a = 2$.

Le signal original y_n de Y(z) est donc : $\boldsymbol{y_n = 0{,}6\ \times 2^n\ e_n}$

2- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{1}{(3z-6)}$ Déterminer l'expression $y_n$de l'original du signal de sortie

On a : $\mathrm{Y(z)} = \frac{1}{3z-6} = \frac{1}{3\,(z-2)} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{z-2} \times \frac{z}{z} = \frac{1}{3} \times \frac{z}{z-2} \times \frac{1}{z}$

On a une relation du type $\frac{z}{z-a}$ avec $a = 2$ et un retard de 1.

Le signal original y_n de Y(z) est donc : $\boldsymbol{y_n = \frac{1}{3} \times 2^{n-1}\ e_{n-1}}$

3- La transformée en Z d'un signal en sortie de filtre est : $Y(Z) = \frac{z}{(4z-2)} + \frac{1}{z\,(2z-0.4)}$ Déterminer l'expression $y_n$de l'original du signal de sortie

$$\mathrm{Y(z)} = \frac{z}{(4z\ -\ 2)} + \frac{1}{\mathrm{z}\,(2z\ -\ 0.4)}$$

$$\mathrm{Y(z)} = \frac{z}{4(z\ -\ 0{,}5)} + \frac{\mathrm{z}}{(2z\ -\ 0{,}4)} \times \frac{1}{z^2}$$

$$\mathrm{Y(z)} = \frac{z}{4(z\ -\ 0{,}5)} + \frac{\mathrm{z}}{2(z\ -\ 0{,}2)} \times \frac{1}{z^2}$$

$$\mathrm{Y(z)} = 0{,}25 \frac{z}{z\ -\ 0{,}5} + 0{,}5\ \frac{\mathrm{z}}{z\ -\ 0{,}2} \times \frac{1}{z^2}$$

On a des relations du type $\frac{z}{z-a}$ avec $a = 0{,}5$ et $a = 0{,}2$ retardé de 2.

Le signal original y_n de Y(z) est donc : $\boldsymbol{y_n = 0{,}25\ \times 0{,}5^n\ e_n\ +\ 0{,}5\ \times 0{,}2^{n-2}\ e_{n-2}}$