CALCUL MATRICIEL

Exercice 1 : *Matrice inverse*

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 0{,}25 \end{pmatrix}$ avec a et b qui sont des constantes réelles

1- En effectuant le produit $A \times B$, déterminer la valeur des constantes a et b pour que $B = A^{-1}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & 0{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2a & 1b + 2 \times 0{,}25 \\ 0 \times 1 + 4a & 0b + 4 \times 0{,}25 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2a & b + 0{,}5 \\ 4a & 1 \end{pmatrix}$$

Pour avoir $B = A^{-1}$, il faut que ce produit donne la matrice identité : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il faut donc que $\begin{cases} 1 + 2a = 1 \\ b + 0{,}5 = 0 \\ 4a = 0 \end{cases}$

On constate que si $a = 0$ et $b = -0{,}5$, les 3 égalités précédentes sont vérifiées.

2- Ecrire la matrice A^{-1}

On peut donc dire que $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : *Calcul matriciel pour résoudre un système linéaire*

x , y , z sont 3 inconnues qui satisfont les 3 relations suivantes : $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ x - 3y - z = -2 \\ 2y + 3z = -1 \end{cases}$

1- Soit la matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le système précédent est équivalent à l'équation matricielle : $A\,X = B$

Ecrire les matrices A et B et donner leur taille.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A de taille 3x3 X de taille 3x1 B de taille 3x1

2- Ecrire X en fonction de A et B

Le système est équivalent à :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Soit : $A\,X = B$

On a donc : $A^{-1}\,A\;X = A^{-1}\,B$

Soit : $X = A^{-1}\,B$

3- Utiliser Géogébra pour déterminer les 3 inconnues x , y , z

$$A = \begin{pmatrix} A1 & B1 & C1 \\ A2 & B2 & C2 \\ A3 & B3 & C3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} A5 \\ A6 \\ A7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X = \text{Inverser}(A)\ B = \begin{pmatrix} 0.93 \\ 1.4 \\ -1.27 \end{pmatrix}$$

On trouve ainsi : $x \approx 0{,}93$; $y = 1{,}4$; $z \approx -1{,}27$

Exercice 3 : *Calcul matriciel*

Soit les 3 matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} b \\ 2 \end{pmatrix}$

Déterminer les réels a et b pour que $A \times B = C$

Le produit $A \times B$ donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2a - 1 \times 4 \\ 2 \times 1 - 1 \times a + 3 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 3 \\ 14 - a \end{pmatrix}$$

L'égalité $A \times B = C$ entraine donne le système suivant d'équations :

$$\begin{cases} 2a - 3 = b \\ 14 - a = 2 \end{cases}$$

La seconde relation $14 - a = 2$ est vraie si $a = 12$

La première relation devient alors $2 \times 12 - 3 = b$, ce qui donne : $b = 21$

On a donc finalement $a = 12$ et $b = 21$.

Exercice 4 : *Calcul matriciel*

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer la matrice C définie par $C = A \times B$ en fonction de a

Le produit $A \times B$ donne :

$$C = A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2a & -1 & 0 \\ a - 1 & -a & -2 \\ 2a & -1 & -22 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : *Calcul matriciel utilisé en graphisme*

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c, d qui sont 4 constantes réelles.
On souhaite calculer les valeurs des coefficients a, b, c, d pour que la courbe représentative C de f passe par les points A et B de coordonnées A(-2 ; 0) et B(4 ; 4) et soit tangente aux segments identifiés sur la figure donnée ci-après.

1- Montrer que a, b, c, d doit satisfaire au système suivant : $\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 0 \\ 12a - 4b + c = 1 \\ 64a + 16b + 4c + d = 4 \\ 48a + 8b + c = -1 \end{cases}$

Les 4 conditions sont respectivement les suivantes :

- La courbe passe par le point A(-2 ; 0) . On a donc $f(-2) = 0$, soit
  $a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = 0$
  $-8a + 4b - 2c + d = 0$
- La courbe est tangente au point A, au segment dont le coefficient directeur est égal à 1. On a donc : $f'(-2) = 1$.
  Comme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on aura : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
  $f'(-2) = 1$ donne alors : $3a(-2)^2 + 2b \times (-2) + c = 1$
  Ce qui fait : $12a - 4b + c = 1$
- La courbe passe par le point B(4 ; 4) . On a donc $f(4) = 4$, soit
  $a \times 4^3 + b \times 4^2 + c \times 4 + d = 0$
  $64\,a + 16\,b + 4\,c + d = 4$
- La courbe est tangente au point B, au segment dont le coefficient directeur est égal à -1. On a donc : $f'(4) = -1$.
  Comme $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
  $f'(4) = -1$ donne alors : $3a \times 4^2 + 2b \times 4 + c = -1$
  Ce qui fait : $48a + 8b + c = -1$

2- Soit la matrice $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$. Le système précédent est équivalent à l'équation matricielle : $A\,X = B$

Ecrire les matrices A et B et donner leur taille.

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ 12 & -4 & 1 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \\ 48 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

A de taille 4x4 $\qquad$ B de taille 4x1

3- Ecrire X en fonction de A et B. Utiliser Géogébra pour déterminer les 4 inconnues a, b, c, d

On a l'équation matricielle suivante : $A\,X = B$

On a donc : $A^{-1}\,A\;X = A^{-1}\,B$

Soit : $X = A^{-1}\,B$

$$A = \begin{pmatrix} A1 & B1 & C1 & D1 \\ A2 & B2 & C2 & D2 \\ A3 & B3 & C3 & D3 \\ A4 & B4 & C4 & D4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ 12 & -4 & 1 & 0 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \\ 48 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} A6 \\ A7 \\ A8 \\ A9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \text{Inverser}(A)\ B = \begin{pmatrix} -0.04 \\ -0.06 \\ 1.22 \\ 2.37 \end{pmatrix}$$

On trouve ainsi : $a \approx -0{,}04$; $b \approx -0{,}06$; $c \approx 1{,}22$; $d \approx 2{,}37$

4- Donner alors l'expression $f(x)$. Saisir cette expression sur calculatrice avec la fenêtre graphique $-3 < x < 6$ et $-3 < y < 6$ et tracer précisément la courbe obtenue ci-dessous :