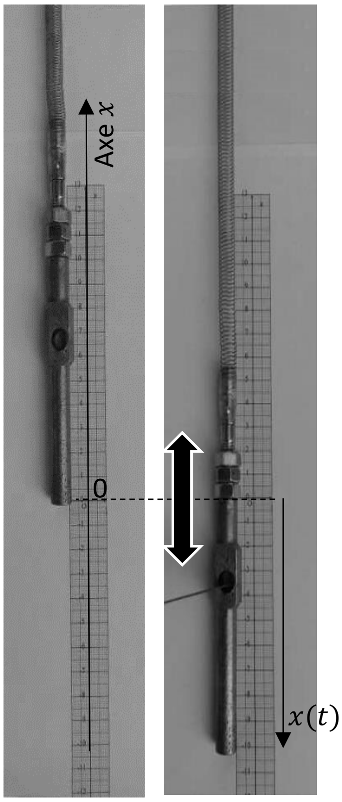
TP - Fonctions sinusoïdales pour modéliser un mouvement vibratoire

Une masse m est suspendue verticalement à un ressort. En l'écartant de sa position d'origine, elle se met à osciller. Un axe x vertical, gradué en cm, permet de repérer la position du point bas de la masse. A l'équilibre, ce point se trouve sur l'abscisse $x = 0$. On se propose d'étudier comment évoluent la **position** $x(t)$ et la **vitesse** $v(t)$ de cette masse en fonction du temps t.



⇨ Copie des fichiers utiles dans votre zone de travail : télécharger le fichier zip dans votre zone de travail *Mes documents*.

PARTIE 1 : masse suspendue : $m = 30\ g$

On débute ce travail avec une masse m de 30 g. Le ressort est étiré jusqu'à ce que l'abscisse x du point bas soit de -3 cm. Au temps $t = 0$, la masse est lâchée et se met à osciller. On a donc $x(0) = -3$. Ce mouvement a été filmé avec une caméra GoPro avec 60 images par seconde *(sur les caméras usuelles, c'est 23 images par seconde).*

1 – Exploitation de la vidéo pour déterminer l'évolution expérimentale de $x(t)$:

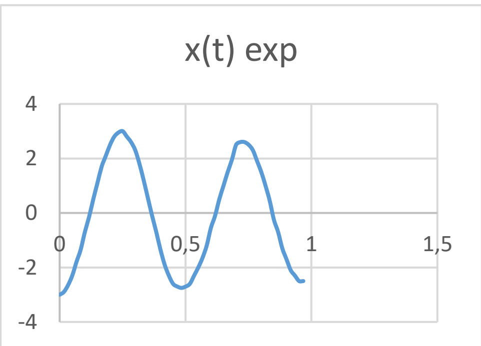
⇨ Lire la vidéo *m=30g.mp4* se trouvant dans le répertoire copié avec le logiciel VLC.

⇨ Avec le curseur de lecture, positionner la lecture au début du lâché de la masse. En appuyant sur la touche $\boxed{e}$ du clavier, vous faites défiler les images prises tous les 1/60 ième de seconde.

⇨ Lancer en même temps le logiciel *Excel*. Ouvrir un nouveau fichier et sur les colonnes A et B écrire les titres : *Temps* t et $x(t)$ exp

	A	B	C
1	Temps t	x(t) exp	
2		-3	
3		-2,9	
4			
5			

⇨ Pour chaque image composant la vidéo (il y a 60 images par secondes), noter dans le tableau *Excel* la position $x(t)$ du bout inférieur de la masse. Compléter le tableau pour 2 allers-retours de la masse.

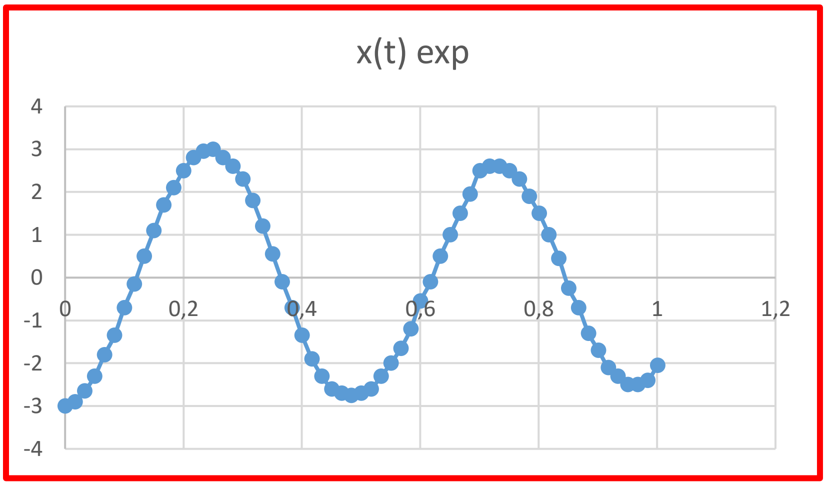


⇨ Compléter la colonne *Temps t*

	A	B
1	temps	x(t) exp
2	0	-3
3	=A2+1/60	-2,9
4	0,03333333	-2,65
5	0,05	-2,3

⇨ Afficher la courbe **expérimentale** $x(t)exp$ en procédant de la manière suivante :

- sélectionner les 2 colonnes *Temps t* et *x(t) exp* avec leur titre
- cliquer sur : *Insérer / Graphique / Nuages de points / Lignes sans points*



2 – Evolution expérimentale de la vitesse $V(t)$:

La vitesse au temps t peut facilement être déterminée à partir des valeurs relevées précédemment :

$$v(t) \quad = \quad \frac{x(t)-x(t-\Delta t)}{\Delta t} \qquad \text{avec ici :} \qquad \Delta t = \frac{1}{60}$$

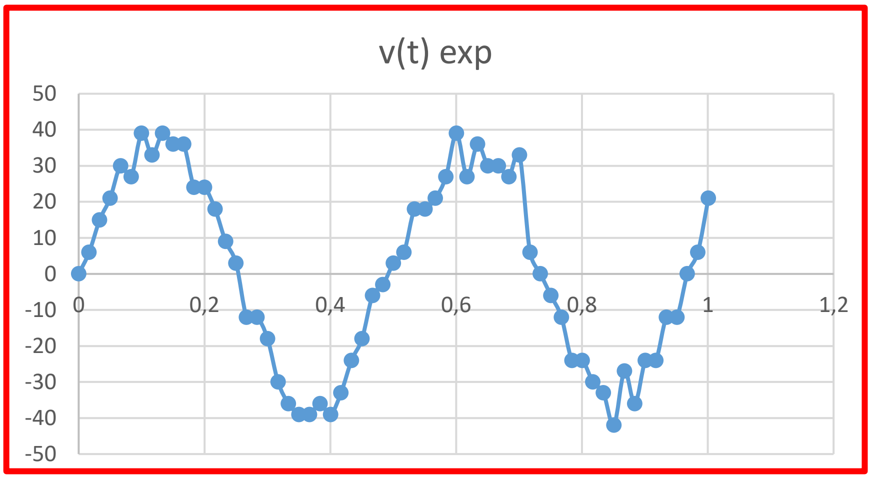
	A	B	C	D	E
1	temps	x(t) exp		v(t) exp	
2	0	-3		0	
3	0,01668335	-2,9		=(B3-B2)/(1/60)	
4	0,0333667	-2,65			
5	0,05005005	-2,3			
6	0,0667334	-1,8			

⇨ Sur la colonne D écrire le titre *v(t) exp*.

⇨ Mettre la cellule D2 à 0 ($v(0) = 0$) et dans la cellule D3 : =(B3-B2)/(1/60)

⇨ Dupliquer cette cellule vers le bas pour couvrir tous les temps relevés.

⇨ Sélectionner les colonnes A et D (utiliser la touche Ctrl) et insérer la courbe **expérimentale** $v(t)exp$



Q1 : Quelle est la vitesse maximale atteinte lors de ce mouvement ? Dans quelle position de la masse (basse, milieu, haute) cette vitesse est-elle atteinte ? La vitesse maximale est d'environ 40 cm/s

3 – Evolution théorique de la position $x(t)$

Théoriquement, en résolvant une équation différentielle, on a : $x(t) = -3\cos(\omega\, t)$ avec ω qui est la pulsation en rd/s du mouvement : $\omega = 2\pi\, f$, f étant la fréquence en Hz de l'oscillation.

⇨ Sur la colonne C écrire le titre *x(t) exp*.

⇨ Sur la colonne G écrire le titre *fréquence* et mettre la cellule G2 à 1.2

	A	B	C	D	E	F	G
1	temps	x(t) exp	x(t) th	v(t) exp			fréquence
2	0	-3	=-3*COS(2*PI()*G2*A2)				1,2
3	0,01668335	-2,9	COS(nombre)	6			
4	0,0333667	-2,65		15			
5	0,05005005	-2,3		21			
6	0,0667334	-1,8		30			
7	0,08341675	-1,35		27			

⇨ Dans la cellule C2 : =-3*COS(2*PI()*G2*A2)) (utiliser la touche F4 pour les $)

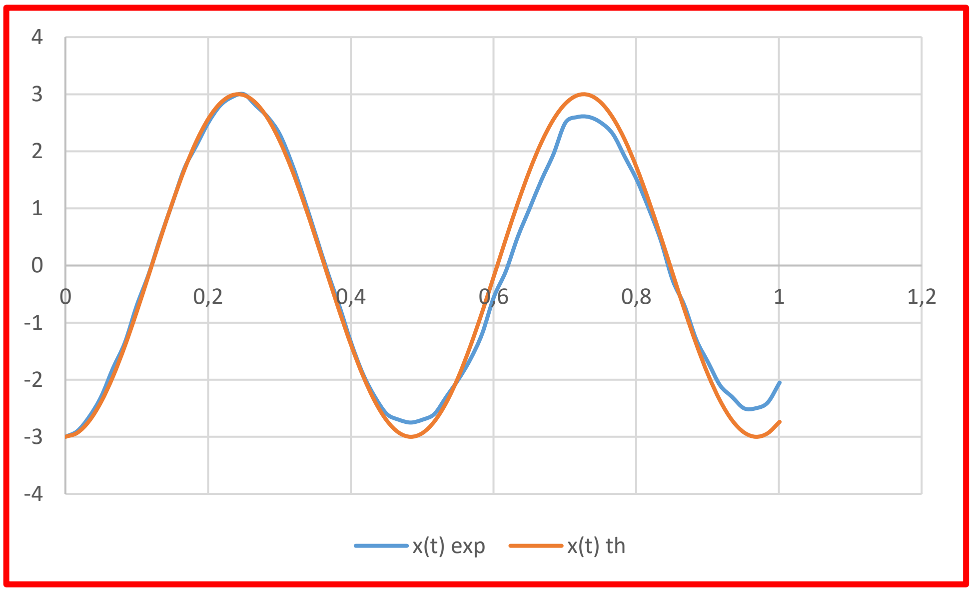
⇨ Dupliquer cette cellule vers le bas pour couvrir tous les temps relevés

⇨ Sélectionner les colonnes A, B et C pour insérer les courbes $x(t)exp$ et $x(t)th$ afin de pouvoir les comparer.

⇨ Modifier la valeur de la fréquence f (cellule G2) afin de faire coïncider au mieux les 2 courbes.

Q2 : Quelle est la fréquence f du mouvement expérimental ? En déduire la période T.

$f \approx 2\ Hz$



4 – Evolution théorique de la vitesse $v(t)$

Théoriquement, $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t)$

	A	B	C	D	E	F	G
1	temps	x(t) exp	x(t) th	v(t) exp	v(t) th		**fréquence**
2	0	-3	-3	0			2,065
3	0,01668335	-2,9	-2,92998982	6			
4	0,0333667	-2,65	-2,7232269	15			
5	0,05005005	-2,3	-2,38936158	21			
6	0,0667334	-1,8	-1,9439765	30			
7	0,08341675	-1,35	-1,40785933	27			

Q3 : Donner l'expression théorique de $v(t)$:

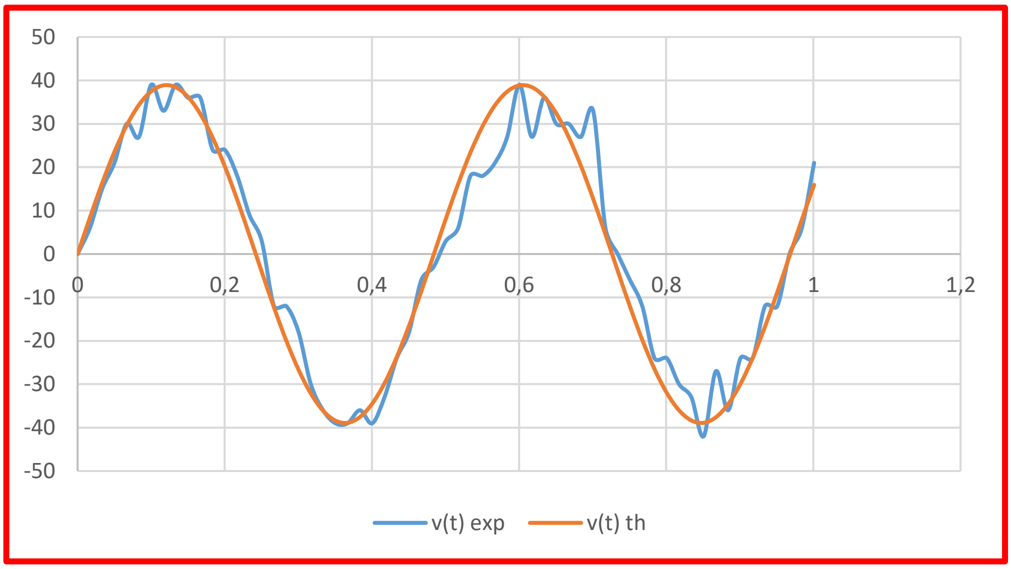
$$x(t) = 3\,\omega \sin(\omega\, t)$$

⇨ Sur la colonne E écrire le titre v*(t) th*.

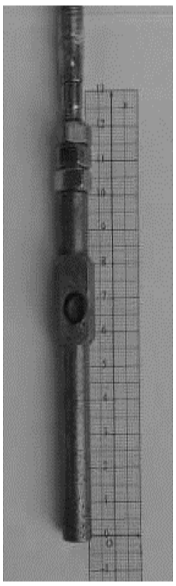
⇨ En utilisant l'expression de $v(t)$, compléter la cellule E2, puis par duplication, déterminer les vitesses pour tous les temps relevés.

⇨ Sélectionner les colonnes A, D et E pour insérer les courbes $v(t)exp$ et $v(t)th$ afin de pouvoir les comparer.

Q4 : Y a-t-il concordance entre les résultats relevés expérimentalement et ceux calculés théoriquement ?



PARTIE 2 : masse suspendue : $m = 100\ g$



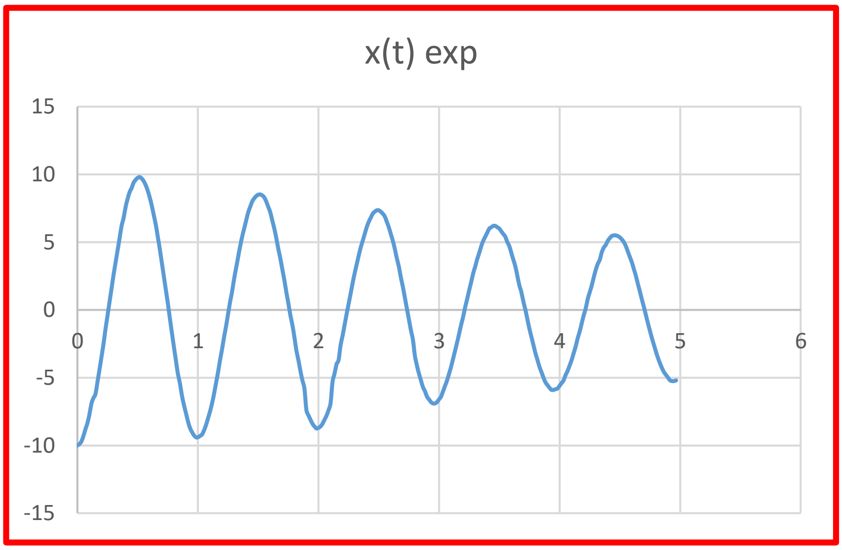
On étudie à présent le mouvement avec une masse m de 100 g. Ici, le ressort est étiré jusqu'à ce que l'abscisse x du point bas soit de -10 cm. Au temps $t = 0$, la masse est lâchée et se met à osciller. On a donc $x(0) = -10$. Ce mouvement a également été filmé avec la caméra GoPro (60 images par seconde)

1 – Exploitation de la vidéo pour déterminer l'évolution expérimentale de $x(t)$:

⇨ Lancer la vidéo *m=100g.mp4*

Le relevé des positions étant long, il a été déjà fait pour 5 oscillations. Les valeurs de $x(t)$ se trouvent dans le fichier *m=100g.xls*

⇨ Insérer la courbe expérimentale $x(t)exp$

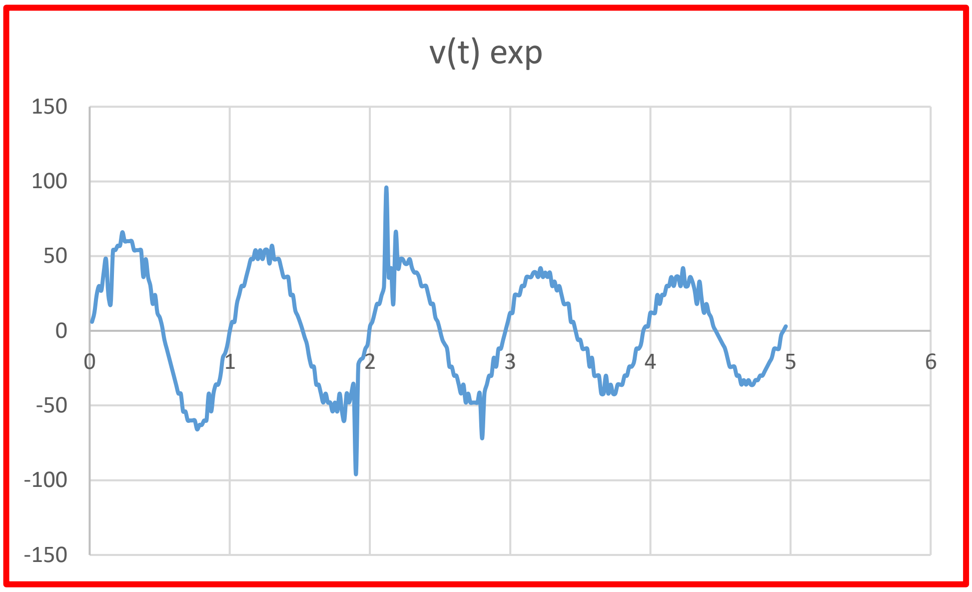


2 – Evolution expérimentale de la vitesse $V(t)$:

⇨ Déterminer sur la colonne D les vitesses calculées à partir des relevés expérimentaux de la position

⇨ Insérer la courbe expérimentale $v(t)exp$

	A	B	C	D
1	t	x(t) exp		v(t) exp
2	0	-10		
3	0,01666667	-9,9		
4	0,03333333	-9,7		
5	0,05	-9,3		
6	0,06666667	-8,8		
7	0,08333333	-8,35		
8	0,1	-7,7		



Q5 : Quelle est la vitesse maximale atteinte lors de ce mouvement ?

La vitesse maximale est d'environ 60 cm/s

Q6 : L'amplitude de l'oscillation baisse après chaque aller-retour. A la 1ère oscillation l'amplitude est de 10 cm. Quelle est cette amplitude à la 5^{ième} oscillation ?

A la 5^{ième} oscillation, l'amplitude est d'environ 5,5 cm

3 – Evolution théorique de la position $x(t)$

Pour trouver la fonction $x(t)$ théoriquement, en résout toujours une équation différentielle. Si on veut tenir compte de l'amortissement des oscillations, on a à présent : $x(t) = -10\, e^{-\lambda t} \cos{(\omega\, t)}$ avec ω qui est la pulsation en rd/s et λ réel positif appelé facteur d'amortissement.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	t	x(t) exp	x(t) th	v(t) exp			fréquence	lamda
2	0	-10		0			2,065	0
3	0,01666667	-9,9		6				
4	0,03333333	-9,7		12				

⇨ Sur la colonne G écrire le titre *fréquence* et mettre la cellule G2 à 2.065

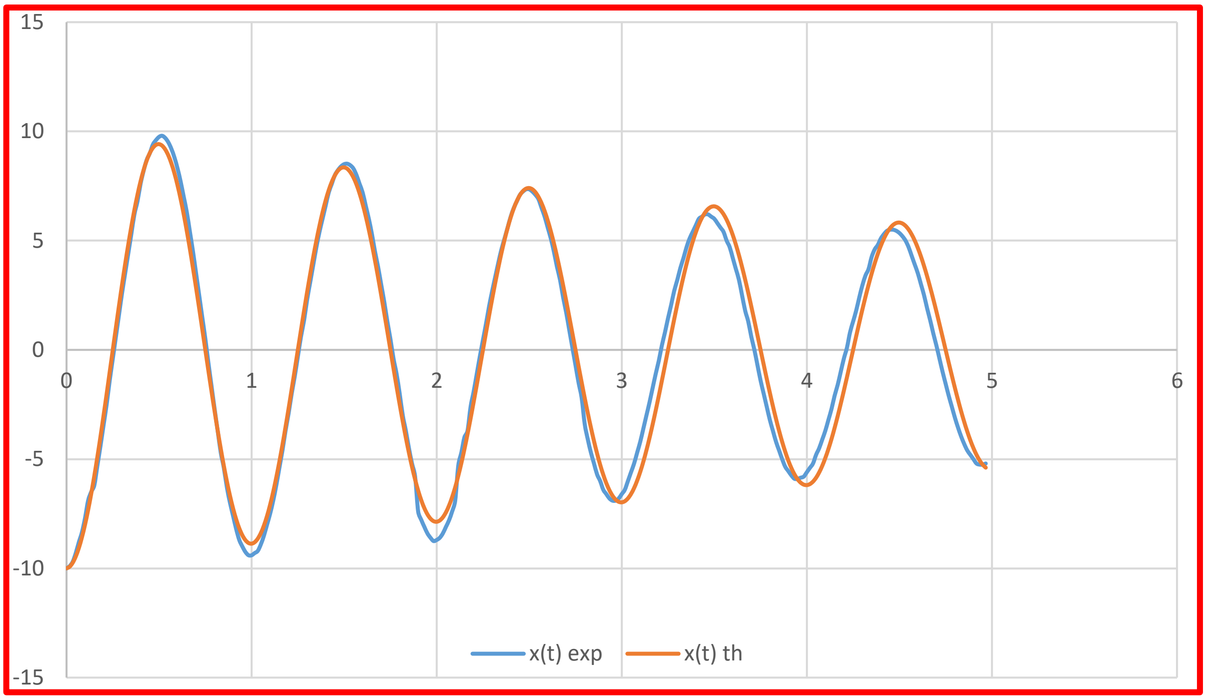
⇨ Sur la colonne H écrire le titre *lamda* et mettre la cellule H2 à 0

⇨ Déterminer sur la colonne C les positions $x(t)$ théoriques en utilisant l'expression précédente

⇨ Sélectionner les colonnes A, B et C pour insérer les courbes $x(t)exp$ et $x(t)th$ afin de pouvoir les comparer.

⇨ Modifier les valeurs de la fréquence f et du facteur d'amortissement λ (cellule H2) afin de faire coïncider au mieux les 2 courbes.

Q7 : Quelle est la fréquence f du mouvement expérimental ? En déduire la période T. Quelle est la valeur de λ ? La concordance est-elle correcte ?



Pour avoir concordance entre les courbes théorique et expérimentale, on doit avoir :

$$x(t) = -10\, e^{-\lambda t} \cos(\omega\, t)$$

Avec :

- $\omega = 2\pi \times 1$
- $\lambda \approx 0{,}12$

On a donc une fréquence de $f = 1\ Hz$ environ.