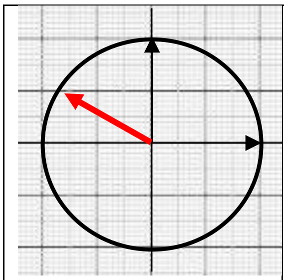
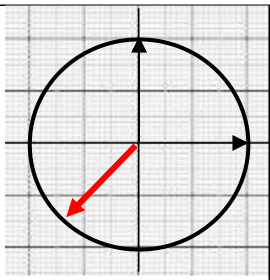
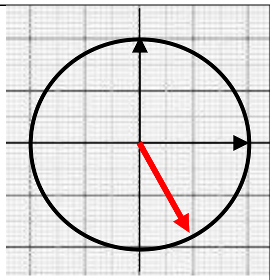
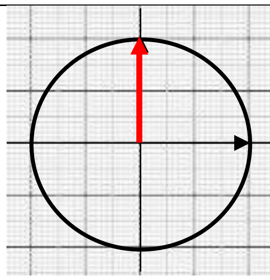
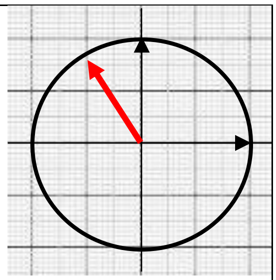
FONCTIONS CIRCULAIRES - Corrigé

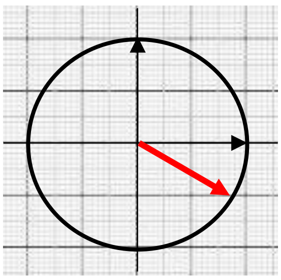
Exercice 1. : Compléter le tableau ci-dessous en repérant l'angle défini sur le cercle trigonométrique et en donnant les valeurs du cosinus et du sinus de cet angle.

				
$\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0$	$\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$
$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$	$\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2. : Pour chacun des angles suivants : $\frac{11\pi}{6}$ rad ; 9 rad

⇨ donner sa mesure principale,
⇨ écrire cet angle sous la forme : $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{2\pi}$ avec $-\pi < \alpha \leq +\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

En plaçant le point image sur le cercle trigonométrique, on voit de suite que la mesure principale de $\frac{11\pi}{6}$ est de $\frac{-\pi}{6}$.



On a :

$$\frac{11\pi}{6} = \frac{-\pi}{6} + \frac{12\pi}{6}$$

D'où on peut écrire :

$$\frac{11\pi}{6} = \frac{-\pi}{6} + 1 \times 2\pi$$

$$\frac{9}{2\pi} \approx 1{,}4$$

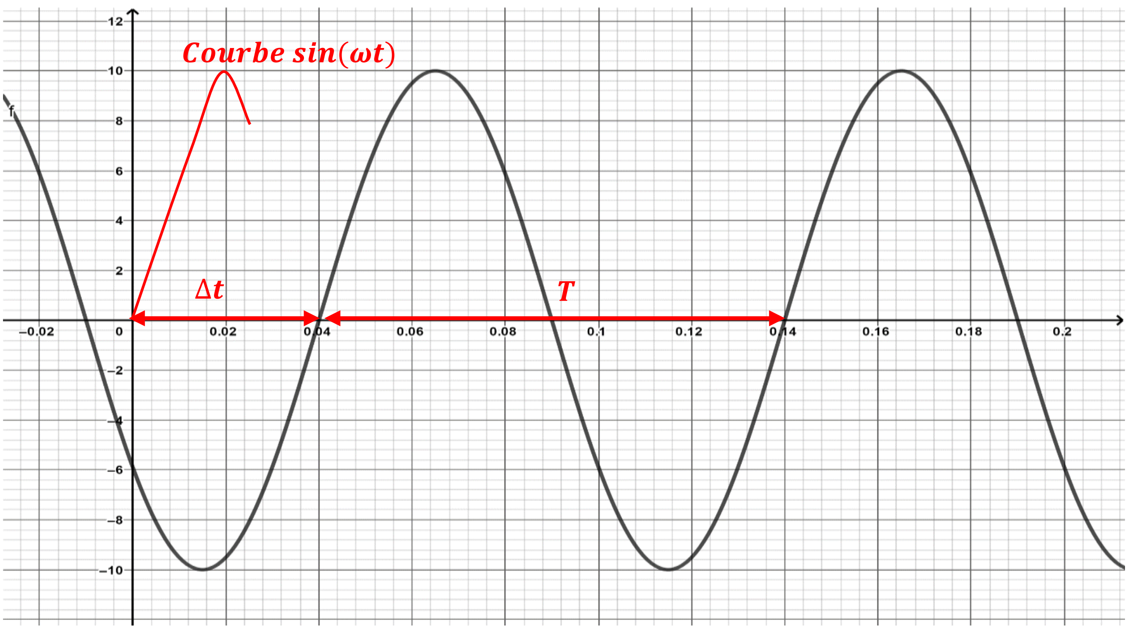
On a : $9 - 1 \times 2\pi \approx 2{,}72$

La mesure principale de $9\,rad$ est de $2{,}72\,rad$

D'où on peut écrire :

$$9 \approx 2{,}72 + 1 \times 2\pi$$

Exercice 3. : Soit la fonction sinusoïdale définies sur $\mathbb{R}$ par $f : t \to f(t) = A \sin(\omega t - \varphi)$ et dont la courbe représentative C_f sont données ci-après. Donner l'expression de $f(t)$. **Justifier**.



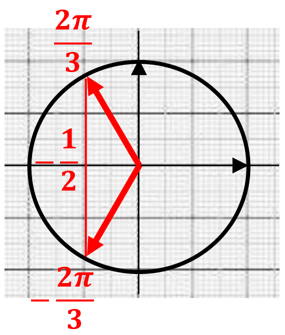
L’amplitude lue sur la courbe est de 10 car $-10 \leq f(t) \leq 10$

La période est lue sur la courbe et est de $T = 0{,}1\ s$. Le décalage temporel entre la courbe et une courbe en sinus, sans déphasage est de $\Delta t = 0{,}04\ s$.

On a donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}1} = 20\pi$ et $\varphi = \frac{\Delta t}{T} \times 2\pi = \frac{0{,}04}{0{,}1} \times 2\pi = 0{,}8\,\pi$

Finalement, on peut dire que $f(t) = 10 \sin(20\pi\, t - 0{,}8\pi)$

Exercice 4. : Résoudre l’équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ en se limitant aux solutions appartenant à l’intervalle $]-2\pi\ ; 2\pi]$.
Justifier en traçant un cercle trigonométrique à main levée.



Les solutions de l’équation $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ sont du type :

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi\, k \\ x = \frac{-2\pi}{3} + 2\pi\, k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Parmi celles-ci, les solutions appartenant à l’intervalle $]-2\pi\ ; 2\pi]$ sont :

$$\frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \frac{2\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = \frac{-4\pi}{3} \quad ; \quad \frac{-2\pi}{3} \quad ; \quad \frac{-2\pi}{3} + 2\pi = \frac{-2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

On peut donc conclure que $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ si $x \in \left\{\frac{-4\pi}{3}\ ;\ \frac{-2\pi}{3}\ ;\ \frac{2\pi}{3}\ ;\ \frac{4\pi}{3}\right\}$

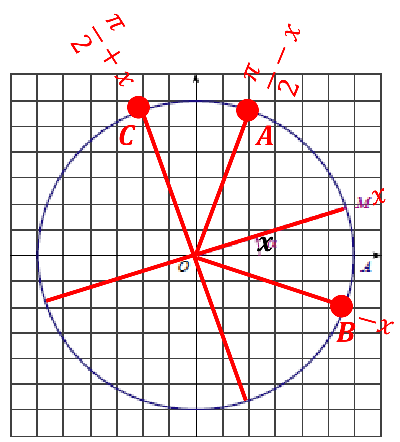
Exercice 5. : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 2\cos(30\, t)$

1- Déterminer la période T de cette fonction.
   On a : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et donc : $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15} \approx 0{,}209\ s$. La fréquence est de : $f = \frac{1}{T} = \frac{15}{\pi} \approx 4{,}77\ Hz$
2- Quelles sont les valeurs minimales et maximales prises par $f(t)$?
   Pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(30t) \leq 1$.
   On a donc : $-2 \leq 2\cos(30t) \leq 2$
   Et donc : $-2 \leq f(t) \leq 2$
3- Déterminer l’expression $f'(t)$ de la fonction dérivée :
   $$f'(t) = 2 \times 30 \times (-\sin(30\, t)) = -60\sin(30t)$$
4- Quelles sont les valeurs minimales et maximales prises par $f'(t)$?
   Pour toute valeur de $t \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(30t) \leq 1$.
   On a donc : $-60 \leq -60\sin(30t) \leq 60$
   Et donc : $-60 \leq f'(t) \leq 60$

Exercice 6. : ⇨ Sur le cercle trigo ci-contre, le point M est associé à l’angle x.
Repérer les points A, B, C associés respectivement aux angles $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $(-x)$ et $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

⇨ Simplifier l’expression suivante :

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$



On lit sur le cercle trigonométrique :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

On a ainsi :

$$F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$F = \sin(x) - \sin(x) - \sin(x)$$

$$F = -\sin(x)$$

<u>Exercice 7.</u> : Soit la fonction sinusoïdale définies sur $\mathbb{R}$ par $y: t \to y(t) = 5\sin(2\pi \times 10\,t - 2\pi \times 0{,}1)$. Calculer la période, le décalage Δt vers la droite entre la courbe C_y et l'origine des temps et tracer l'allure de la courbe C_y sur 1,5 période, en graduant les axes du repère.

Par identification, on lit ici que : $\omega = 2\pi \times 10$ ce qui permet de dire que $f = 10\,Hz$ et $T = 0{,}1\,s$

On lit aussi que : $\varphi = 2\pi \times 0{,}1$ ce qui permet de dire que $\frac{\Delta t}{T} = 0{,}1$ soit $\Delta t = 0{,}1\,T = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01\,s$

On peut alors tracer la courbe suivante :