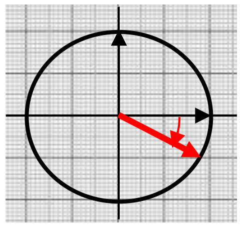
Ds Bts Sna2 **NOMBRES COMPLEXES** Nom :

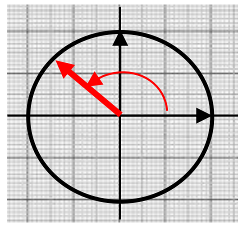
EXERCICE 1 : *(3 pts)* Soit les nombres complexes : $z_A = 2\,e^{i\frac{-\pi}{6}}$ et $z_B = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Donner les formes trigonométrique et algébrique de ces nombres.



On a : $z_A = 2\,e^{i\frac{-\pi}{6}}$.

On a donc : $z_A = 2\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + 2\ \ i\ sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 2i\frac{-1}{2} = \sqrt{3} - i$

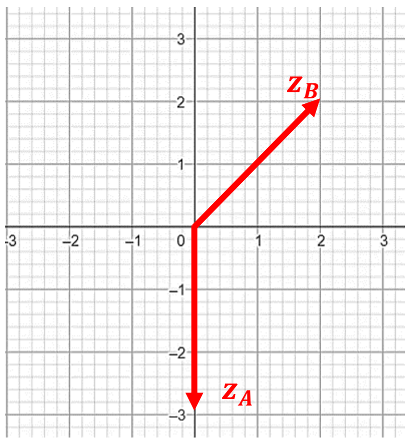


On a d'autre part : $z_B = \sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$

On a donc : $z_C = \sqrt{2}\ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\,i\ \ sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\,\sqrt{2}\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

Et donc : $z_C = -1 + i$

EXERCICE 2 : *(11 pts)* Soit les nombres complexes : $z_A = -3i$ et $z_B = 2 + 2i$



1- Tracer les vecteurs images de z_A et z_B dans un repère.

2- Comment appelle-t-on le nombre complexe $\overline{z_B}$? Calculer le produit $z_B \times \overline{z_B}$

$\overline{z_B} = 2 - 2i$ est le conjugué du nombre complexe z_B.

$z_B \times \overline{z_B} = (2 + 2i) \times (2 - 2i) = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$

3- Calculer sous forme algébrique $z_C = z_A \times z_B$ et $z_D = \frac{z_A}{z_B}$

$z_C = z_A \times z_B = -3i\,(2 + 2i) = -6i - 6i^2 = -6i + 6 = 6 - 6i$

On a d'autre part :

$$z_D = \frac{z_A}{z_B} = \frac{-3i}{2 + 2i} = \frac{-3i\,(2 - 2i)}{(2 + 2i) \times (2 - 2i)} = \frac{-6i + 6i^2}{2^2 + 2^2} = \frac{-6i - 6}{8}$$

$$z_D = -\frac{6}{8} - \frac{6}{8}i = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i = -0{,}75 - 0{,}75i$$

4- Déterminer **sans justifier** le module et l'argument de z_A. Donner l'écriture exponentielle de z_A

On voit graphiquement que $|z_A| = 3$ et que $\arg(z_A) = -\frac{\pi}{2}$. On a donc : $z_A = 3\,e^{i\frac{-\pi}{2}}$

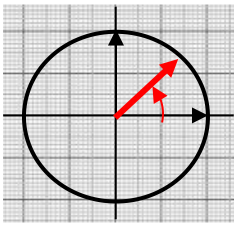
5- Déterminer **en justifiant**, le module et l'argument de z_B (tracer cercle trigo). Donner l'écriture exponentielle de z_B

On a : $|z_B\ | = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$

Soit $\theta = \arg(z_B)$

On a : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z_B|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\theta) = \frac{b}{|z_B|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



On repère sur le cercle trigonométrique l'angle θ correspondant :

On en déduit que :

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

On a donc :

$$z_A = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$$

6- Calculer sous forme exponentielle $z_C = z_A \times z_B$ et $z_D = \frac{z_A}{z_B}$

$$z_C = z_A \times z_B = 3\, e^{i\frac{-\pi}{2}} \times 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}} = 6\sqrt{2}\ e^{i\,(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{4})} = 6\sqrt{2}\ e^{i\,(\frac{-2\pi}{4}+\frac{\pi}{4})} = 6\sqrt{2}\ e^{i\frac{-\pi}{4}}$$

$$z_D = \frac{z_A}{z_B} = \frac{3\, e^{i\frac{-\pi}{2}}}{2\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \times \frac{e^{i\frac{-\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\ e^{i\,(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\ e^{-\frac{3\pi}{4}i}$$

<u>EXERCICE 3 :</u> *(6 pts)* On considère les nombres complexes $\boldsymbol{z = 1 + \sqrt{3}\, i}$ et $\boldsymbol{z' = 1 - i}$

1) Calculer $z \times z'$ sous forme algébrique et montrer que : $z \times z' = \left(\sqrt{3}+1\right) + i\,(\sqrt{3}-1)$

$$z \times z' = \left(1+\sqrt{3}\, i\right)(1-i) = 1 - i + \sqrt{3}\, i - \sqrt{3}\, i^2$$
$$= 1 + i\left(-1+\sqrt{3}\right) - \sqrt{3} \times (-1)$$
$$= \left(1+\sqrt{3}\right) + i\,(\sqrt{3}-1)$$

2) Calculer module et argument de z et de z' en donnant les étapes du calcul (avec cercle trigo à main levée) et écrire ces nombres sous forme exponentielle.

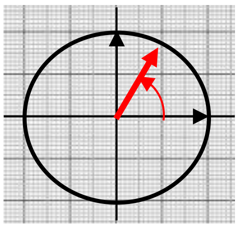
<u>Pour $\boldsymbol{z = 1 + \sqrt{3}\, i}$:</u>

On a : $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

Soit $\theta = \arg(z)$

On a : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{2}$

$\sin(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



On repère sur le cercle trigonométrique l'angle θ correspondant :

On en déduit que : $\theta = \frac{\pi}{3}$

On a donc : $\boldsymbol{z = 2\ e^{i\frac{\pi}{3}}}$

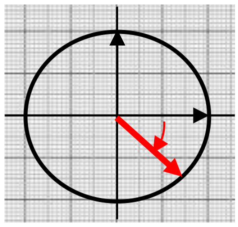
Pour $\boldsymbol{z' = 1 - i}$:

On a : $|z'| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Soit $\theta = \arg(z')$

On a : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z'|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\theta) = \frac{b}{|z'|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$



On repère sur le cercle trigonométrique l'angle θ correspondant :

On en déduit que : $\theta = \frac{-\pi}{4}$

On a donc : $\boldsymbol{z' = \sqrt{2}\ e^{i\frac{-\pi}{4}}}$

3) Calculer $z \times z'$ sous forme exponentielle. En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$z \times z' = 2\ e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}\, e^{i\frac{-\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{-\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right)}$

On a donc : $z \times z' = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{12}}$

A partir de l'écriture exponentielle de $z \times z'$, on peut retourner sur l'écriture algébrique en écrivant la forme trigonométrique :

$$z \times z' = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{12}}$$
$$= 2\sqrt{2}\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\ 2\sqrt{2}\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

On tire de la 1ère question, la forme algébrique de ce même produit : $z \times z' = \left(\sqrt{3} + 1\right) + i\left(\sqrt{3} - 1\right)$

En comparant ces 2 expressions qui sont égales, on peut en déduire que :

$2\sqrt{2}\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\sqrt{3} + 1\right)$ et que $2\sqrt{2}\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\sqrt{3} - 1\right)$

Soit en divisant chacune de ces équations par $2\sqrt{2}$, on obtient :

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$

En multipliant par $\sqrt{2}$ numérateur et dénominateur, on a finalement :

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$

Soit : $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ et $\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$