NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1 : Soient les nombres complexes $z_A = 2i$ et $z_B = 4 + 4i$ et $z_C = \frac{z_A}{z_B}$

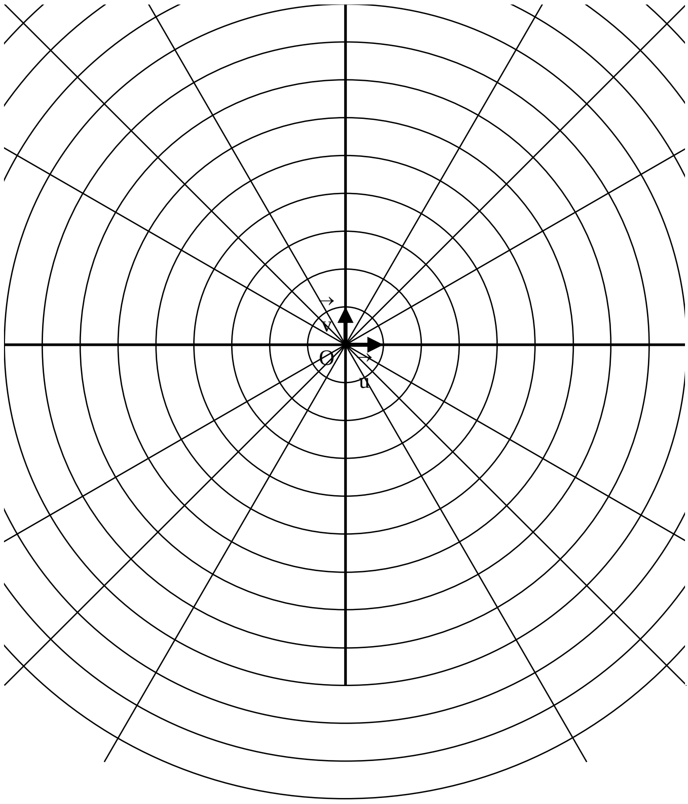
1- Tracer les vecteurs images de z_A et z_B dans le plan complexe ci-contre :

2- Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle en effectuant le minimum de calculs.

3- Déterminer la forme exponentielle de z_C en effectuant la division sous forme exponentielle.

4- Tracer le vecteur image de z_C dans le plan complexe ci-contre

5- Calculer $z_C = \frac{2i}{4+4i}$ en effectuant la division sous forme algébrique. Le vecteur image de z_C tracé auparavant correspond-t-il à ce résultat ?



EXERCICE 2 : Soit les nombres complexes : $z_A = 2\,e^{i\frac{-\pi}{6}}$; $z_B = 3\,e^{i\frac{-\pi}{2}}$ et $z_C = \sqrt{2}\,e^{i\frac{-3\pi}{4}}$

Donner les formes trigonométrique et algébrique de ces nombres.

EXERCICE 2 : Soit les nombres complexes : $z_A = -2 - 2i$ et $z_B = 3i$

1- Tracer les vecteurs images de z_A et z_B dans un repère.
2- Calculer sous forme algébrique $z_C = z_A \times z_B$ et $z_D = \frac{z_A}{z_B}$
3- Déterminer le module et l'argument de z_A (tracer cercle trigo). Donner l'écriture exponentielle de z_A
4- Déterminer sans justifier le module et l'argument de z_B. Donner l'écriture exponentielle de z_B
5- Calculer sous forme exponentielle $z_C = z_A \times z_B$ et $z_D = \frac{z_A}{z_B}$
6- Montrer que : $z_D = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,e^{\frac{3\pi}{4}i}$

EXERCICE 3 : On considère les nombres complexes $\boldsymbol{z = 1 + i\sqrt{3}}$ et $\boldsymbol{z' = 1 - i}$

1) Calculer $z \times z'$ sous forme algébrique et montrer que : $z \times z' = \left(\sqrt{3}+1\right) + i\,(\sqrt{3}-1)$
2) Calculer module et argument de z et de z' en donnant les étapes du calcul (avec cercle trigo à main levée) et écrire ces nombres sous forme exponentielle.
3) Calculer $z \times z'$ sous forme exponentielle
4) Déduire des questions précédentes que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 4 : Réaliser chacune des opérations suivantes sous forme algébrique et sous forme exponentielle. Comparer les 2 résultats.

$\frac{3i}{1-i}$	$(\sqrt{3}+i)(1+\sqrt{3}\,i)$	$\frac{1-i}{2i}$
$\frac{\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}\,i}$	$3i\,(1-i)$	$\frac{2+i}{4+2i}$

EXERCICE 5 : *Problème*

On considère les nombres complexes $\boldsymbol{z = \sqrt{2} + i\,\sqrt{2}}$ et $\boldsymbol{z' = -2 - 2\,\sqrt{3}\;i}$

1) Calculer $\overline{z'}$
2) Effectuer la division $\frac{z}{z'} = \frac{(\sqrt{2}+i\,\sqrt{2})}{(-2-2\,\sqrt{3}\,i)}$. Montrer que $\frac{z}{z'} = \frac{(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,)}{8} + \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}\,i \approx -0.48 + 0.13\,i$
3) Calculer module et argument de z et de z' en donnant les étapes du calcul (avec cercle trigo à main levée)
4) Tracer les vecteurs images OM et OM' de z et z', dans un repère (1 unité = 2 carreaux ou cm) en utilisant les résultats de la question précédente *(laisser les traits de construction, possibilité d'utiliser 1 compas).*
5) Donner la forme exponentielle de z et de z'
6) Calculer $\frac{z}{z'}$ sous forme exponentielle
7) Déduire des questions 3) et 7) que $\cos\left(\frac{11\,\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{11\,\pi}{12}\right)$. Vérifier l'exactitude de ces valeurs en comparant avec le résultat de la calculatrice. Retrouve t'on environ ces résultats sur un cercle trigo tracé à main levée ?