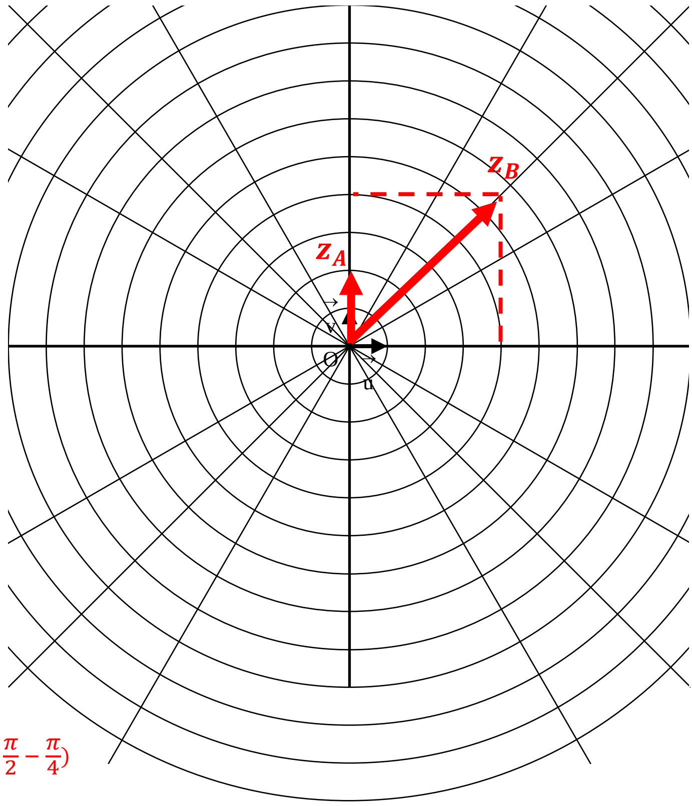
# NOMBRES COMPLEXES - CORRECTION

***EXERCICE 1 :*** Soient les nombres complexes $z_A = 2i$ et $z_B = 4 + 4i$ et $z_C = \frac{z_A}{z_B}$




1- Tracer les vecteurs images de $z_A$ et $z_B$ dans le plan complexe ci-contre :

2- Ecrire $z_A$ et $z_B$ sous forme exponentielle en effectuant le minimum de calculs.

- On voit graphiquement que $|z_A| = 2$ et que $\arg(z_A) = \frac{\pi}{2}$. On a donc : $z_A = 2\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

- On voit graphiquement $\arg(z_B) = \frac{\pi}{4}$. On calcule $|z_B| = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$
  On a donc : $z_B = 4\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

3- Déterminer la forme exponentielle de $z_C$ en effectuant la division sous forme exponentielle.

$$z_C = \frac{z_A}{z_B} = \frac{2\, e^{i\frac{\pi}{2}}}{4\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{4\sqrt{2}} \times \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

On a donc : $\quad z_C = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \quad e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad e^{i\frac{\pi}{4}} \approx 0{,}35\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

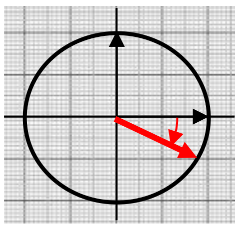
4- Tracer le vecteur image de $z_C$ dans le plan complexe ci-contre : trop petit pour être tracé

5- Calculer $z_C = \frac{2i}{4+4i}$ en effectuant la division sous forme algébrique. Le vecteur image de $z_C$ tracé auparavant correspond-t-il à ce résultat ?

$$z_C = \frac{2i}{4 + 4i} = \frac{2i\,(4 - 4i)}{(4 + 4i)(4 - 4i)} = \frac{8i - 8i^2}{4^2 + 4^2} = \frac{8i + 8}{32} = \frac{8}{32} + \frac{8}{32}i = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

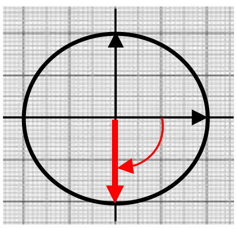
***EXERCICE 2 :*** Soit les nombres complexes : $z_A = 2\, e^{i\frac{-\pi}{6}}$ ; $z_B = 3\, e^{i\frac{-\pi}{2}}$ et $z_C = \sqrt{2}\, e^{i\frac{-3\pi}{4}}$

Donner les formes trigonométrique et algébrique de ces nombres.



On a : $z_A = 2\, e^{i\frac{-\pi}{6}}$.

On a donc : $\quad z_A = 2\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + 2\ i\ \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 2i\frac{-1}{2} = \sqrt{3} - i$

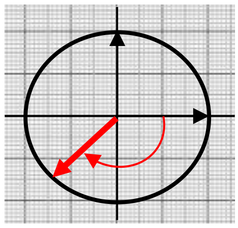


De même : $z_B = 3\, e^{i\frac{-\pi}{2}}$.

On a donc : $z_B = 3\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + 3\ i\ \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = 3 \times 0 \ + \ 3i \times (-1)$

Et donc : $\quad z_B = -3i$

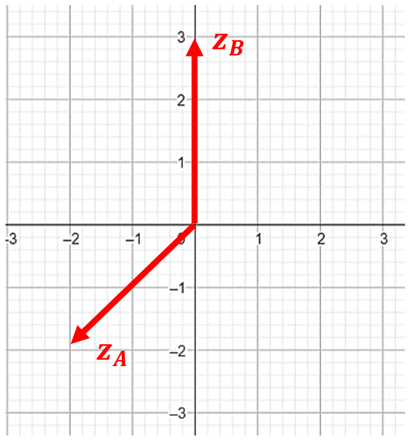
On a enfin : $z_C = \sqrt{2}\, e^{i\frac{-3\pi}{4}}$



On a donc : $z_C = \sqrt{2}\ \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\, i\ \sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\ \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\,\sqrt{2}\ \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Et donc : $z_C = -1 - i$

***EXERCICE 2 :*** Soit les nombres complexes : $z_A = -2 - 2i$ et $z_B = 3i$




1- Tracer les vecteurs images de $z_A$ et $z_B$ dans un repère.

2- Calculer sous forme algébrique $z_C = z_A \times z_B$ et $z_D = \frac{z_A}{z_B}$

On a :

$z_C = z_A \times z_B = (-2 - 2i) \times 3i = -6i - 6i^2 = -6i + 6 = 6 - 6i$

On a aussi :

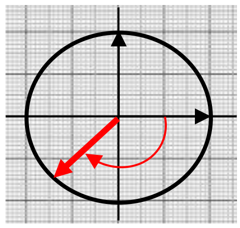
$$z_D = \frac{z_A}{z_B} = \frac{-2 - 2i}{3i} = \frac{(-2 - 2i) \times (-3i)}{3i \times (-3i)} = \frac{6i + 6i^2}{9} = \frac{6i - 6}{9}$$

$$z_D = \frac{-6}{9} + \frac{6}{9}i = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3}i$$

3- Déterminer le module et l'argument de $z_A$ (tracer cercle trigo). Donner l'écriture exponentielle de $z_A$

On a : $|z_A| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$

Soit $\theta = \arg(z_A)$



On a : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z_A|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\theta) = \frac{b}{|z_A|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

On repère sur le cercle trigonométrique l'angle $\theta$ correspondant :

On en déduit que :

$$\theta = \frac{-3\pi}{4}$$

On a donc :

$$z_A = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{-3\pi}{4}}$$

4- Déterminer sans justifier le module et l'argument de $z_B$. Donner l'écriture exponentielle de $z_B$

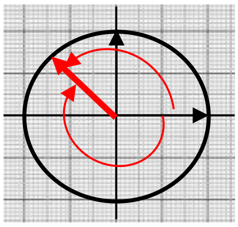
On voit graphiquement que $|z_B| = 3$ et que $\arg(z_B) = \frac{\pi}{2}$. On a donc : $z_B = 3\, e^{i\frac{\pi}{2}}$

5- Calculer sous forme exponentielle $z_C = z_A \times z_B$ et $z_D = \frac{z_A}{z_B}$

$$z_C = z_A \times z_B = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{-3\pi}{4}} \times 3\, e^{i\frac{\pi}{2}} = 6\sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = 6\sqrt{2}\ e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)} = 6\sqrt{2}\ e^{i\frac{-\pi}{4}}$$

$$z_D = \frac{z_A}{z_B} = \frac{2\sqrt{2}\ e^{i\frac{-3\pi}{4}}}{3\, e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{e^{i\frac{-3\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ e^{-\frac{5\pi}{4}i}$$

6- Montrer que : $z_D = \frac{2\sqrt{2}}{3}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$



Les angles $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{-5\pi}{4}$ définissent le même point sur le cercle trigonométrique.

Ainsi on peut écrire également que $z_D = \frac{2\sqrt{2}}{3}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$

***__EXERCICE 3 :__*** On considère les nombres complexes $\boldsymbol{z = 1 + i\sqrt{3}}$ et $\boldsymbol{z' = 1 - i}$

1) Calculer $z \times z'$ sous forme algébrique et montrer que : $z \times z' = (\sqrt{3}+1) + i\,(\sqrt{3}-1)$

$$z \times z' = (1 + i\sqrt{3})(1-i) = 1 - i + i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3}$$
$$= 1 + i\,(-1+\sqrt{3}) - (-1)\sqrt{3}$$
$$= (\sqrt{3}+1) + i\,(\sqrt{3}-1)$$

2) Calculer module et argument de $z$ et de $z'$ en donnant les étapes du calcul (avec cercle trigo à main levée) et écrire ces nombres sous forme exponentielle.

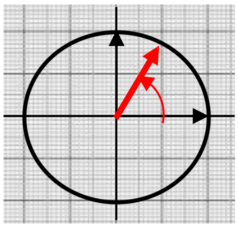
__Pour $\boldsymbol{z = 1 + i\sqrt{3}}$ :__

On a : $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

Soit $\theta = \arg(z)$

On a : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{2}$

$\sin(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



On repère sur le cercle trigonométrique l'angle $\theta$ correspondant :

On en déduit que : $\theta = \frac{\pi}{3}$

On a donc : $\boldsymbol{z = 2\ e^{i\frac{\pi}{3}}}$

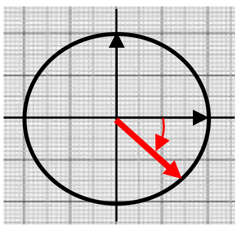
__Pour $\boldsymbol{z' = 1 - i}$ :__

On a : $|z'| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

Soit $\theta = \arg(z')$

On a : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z'|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\theta) = \frac{b}{|z'|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



On repère sur le cercle trigonométrique l'angle $\theta$ correspondant :

On en déduit que : $\theta = -\frac{\pi}{4}$

On a donc : $\boldsymbol{z' = \sqrt{2}\ e^{i\frac{-\pi}{4}}}$

3) Calculer $z \times z'$ sous forme exponentielle

$$z \times z' = 2\ e^{i\,\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}\, e^{i\,\frac{-\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\ e^{i\,\frac{\pi}{3}} \times e^{i\,\frac{-\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\ e^{i\,(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2}\ e^{i\,(\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12})}$$

On a donc : $z \times z' = 2\sqrt{2}\ e^{i\,\frac{\pi}{12}}$

4) Déduire des questions précédentes que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ . En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

A partir de l'écriture exponentielle de $z \times z'$ , on peut retourner sur l'écriture algébrique en écrivant la forme trigonométrique :

$$\begin{aligned} z \times z' &= 2\sqrt{2}\ e^{i\,\frac{\pi}{12}} \\ &= 2\sqrt{2}\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\ 2\sqrt{2}\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

On tire de la 1ère question, la forme algébrique de ce même produit : $z \times z' = \left(\sqrt{3}+1\right) + i\,(\sqrt{3}-1)$

En comparant ces 2 expressions qui sont égales, on peut en déduire que :

$$2\sqrt{2}\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\sqrt{3}+1\right) \qquad \text{et que} \qquad 2\sqrt{2}\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = (\sqrt{3}-1)$$

Soit en divisant chacune de ces équations par $2\sqrt{2}$ , on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}}$$

En multipliant par $\sqrt{2}$ numérateur et dénominateur, on a finalement :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

Soit : $\boldsymbol{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$ et $\boldsymbol{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

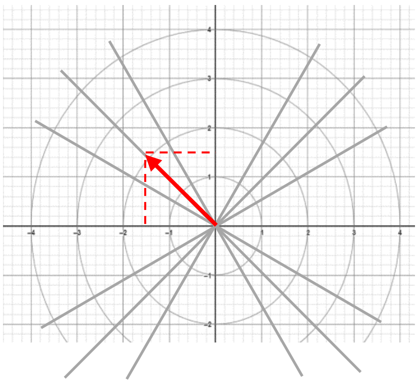
***EXERCICE 4 :*** Réaliser chacune des opérations suivantes sous forme algébrique et sous forme exponentielle. Comparer les 2 résultats.

$$\frac{3i}{1-i}$$

$$\frac{3i}{1-i}=\frac{3i\,(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$
$$=\frac{3i+3i^2}{1^2+(-1)^2}$$
$$=\frac{3i-3}{2}$$
$$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$$

Sans justifications des calculs des module et arguments :

$$\frac{3i}{1-i}=\frac{3\,e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{-\pi}{4}}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{-\pi}{4}}}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{-\pi}{4}\right)}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

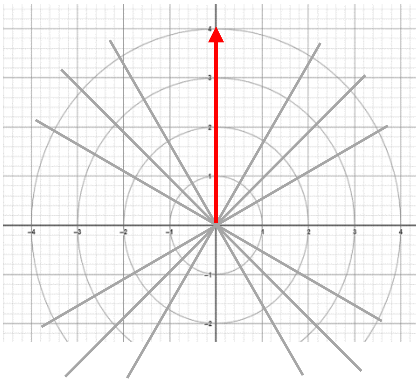


$$(\sqrt{3}+i)(1+\sqrt{3}\,i)$$

$$(\sqrt{3}+i)(1+\sqrt{3}\,i)$$
$$=\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2 i+i+\sqrt{3}i^2$$
$$=\sqrt{3}+3\,i+i-\sqrt{3}$$
$$=4\,i$$

Sans justifications des calculs des module et arguments :

$$(\sqrt{3}+i)(1+\sqrt{3}\,i)$$
$$=2\,e^{i\frac{\pi}{6}}\times 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$=2\times 2\times\ e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$=4\,e^{i\frac{3\pi}{6}}$$
$$=4\,e^{i\frac{\pi}{2}}$$

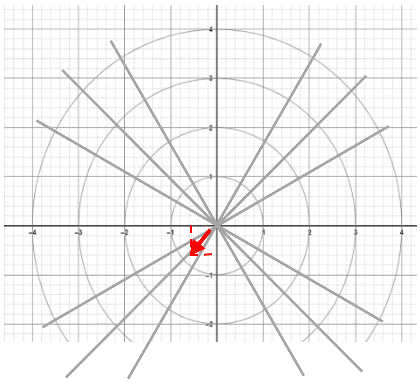


$$\frac{1-i}{2i}$$

$$\frac{1-i}{2i}=\frac{(1-i)\times(-2i)}{2i\ \times(-2i)}$$
$$=\frac{-2i+2i^2}{4}$$
$$=\frac{-2i-2}{4}$$
$$=-\frac{2}{4}-\frac{2}{4}i$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$$

Sans justifications des calculs des module et arguments :

$$\frac{1-i}{2i}=\frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{-\pi}{4}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{e^{i\frac{-\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{-\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{-3\pi}{4}}$$

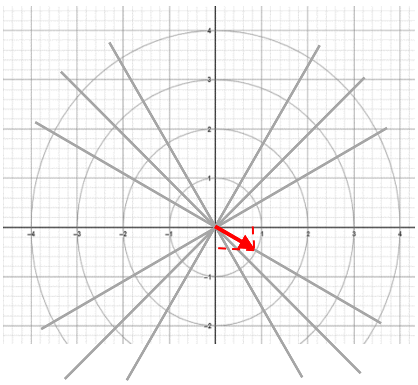


$$\frac{\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}\,i}$$

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}\,i}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}+i)(1-\sqrt{3}\,i)}{(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-(\sqrt{3})^2 i+i-\sqrt{3}i^2}{1^2+\sqrt{3}^2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-3i+i+\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}-2i}{4}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{4}-\frac{2i}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

Sans justifications des calculs des module et arguments :

$$\frac{\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}\,i}$$
$$=\frac{2\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{3}}}$$
$$=\frac{2}{2}\times\ e^{i\,(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}$$
$$=1\,e^{i\frac{-\pi}{6}}$$

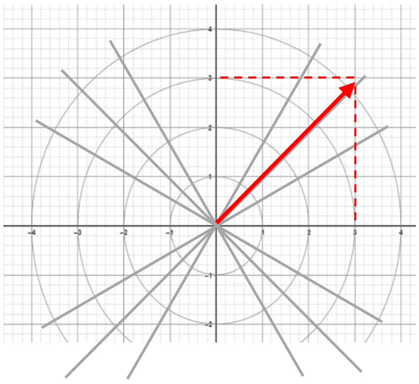


$$3i\,(1-i)$$

$$3i\,(1-i)=3i-3i^2=3+3i$$

Sans justifications des calculs des module et arguments :

$$\begin{aligned}3i\,(1-i)&=3\,e^{i\frac{\pi}{2}}\times\sqrt{2}\,e^{i\frac{-\pi}{4}}\\&=3\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{2}}\times\ e^{i\frac{-\pi}{4}}\\&=3\sqrt{2}\,e^{i\,(\frac{\pi}{2}+\frac{-\pi}{4})}\\&=3\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$



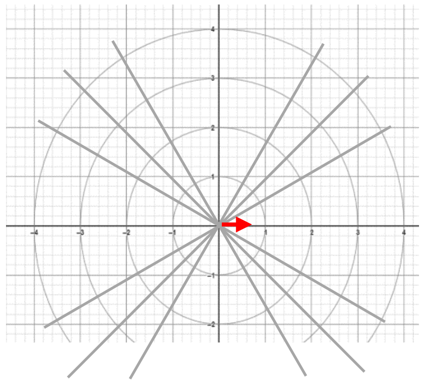
$$\frac{2+i}{4+2i}$$

On peut reconnaitre que le dénominateur est le double du numérateur. On peut ainsi finaliser le calcul de la manière suivante :

$$\frac{2+i}{4+2i}=\frac{2+i}{2(2+i)}=\frac{1}{2}$$

On a donc :

$$\frac{2+i}{4+2i}=\frac{1}{2}\,e^{0\,i}$$



***EXERCICE 5 :*** *Problème*

On considère les nombres complexes $\boldsymbol{z = \sqrt{2} + i\,\sqrt{2}}$ et $\boldsymbol{z' = -2 - 2\,\sqrt{3}\ i}$

1) Calculer $\overline{z'}$

$\overline{z'} = \boldsymbol{-2 + 2\,\sqrt{3}\ i}$

2) Effectuer la division $\frac{z}{z'} = \frac{(\sqrt{2}+i\,\sqrt{2})}{(-2-2\,\sqrt{3}\,i)}$ Montrer que $\frac{z}{z'} = \frac{(-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,)}{8} + \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}\ i \approx -0.48 + 0.13\,i$

$$\frac{z}{z'} = \frac{(\sqrt{2} + i\,\sqrt{2})}{(-2 - 2\,\sqrt{3}\,i)} = \frac{(\sqrt{2} + i\,\sqrt{2})(-2 + 2\,\sqrt{3}\,i)}{(-2 - 2\,\sqrt{3}\,i)(-2 + 2\,\sqrt{3}\,i)}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\,i - 2\sqrt{2}\,i + 2\sqrt{6}\,i^2}{(-2)^2 + (-2\,\sqrt{3}\,)^2}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + i(2\sqrt{6}\ - 2\sqrt{2})}{4 + 12}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{6} + i(2\sqrt{6}\ - 2\sqrt{2})}{16}$$

$$= \frac{-2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{16} + \frac{(2\sqrt{6}\ - 2\sqrt{2})}{16}i$$

$$= \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8} + \frac{(\sqrt{6}\ - \sqrt{2})}{8}i$$

3) Calculer module et argument de $z$ et de $z'$ en donnant les étapes du calcul (avec cercle trigo à main levée)

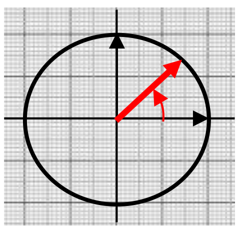
<u>Pour $\boldsymbol{z = \sqrt{2} + i\,\sqrt{2}}$ **:**</u>

On a : $|z'| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{\mathbf{2}}^2 + \sqrt{\mathbf{2}}^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

Soit $\theta = \arg(z)$

On a : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



On repère sur le cercle trigonométrique l'angle $\theta$ correspondant :

On en déduit que : $\theta = \frac{\pi}{4}$

On a donc : $\boldsymbol{z = 2\ e^{i\frac{\pi}{4}}}$

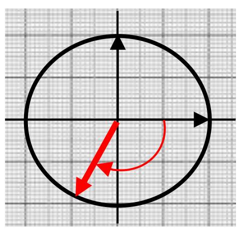
<u>Pour $\boldsymbol{z' = -2 - 2\,\sqrt{3}\ i}$ **:**</u>

On a : $|z'\,| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$

Soit $\theta = \arg(z')$

On a : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z'|} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\sin(\theta) = \frac{b}{|z'|} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

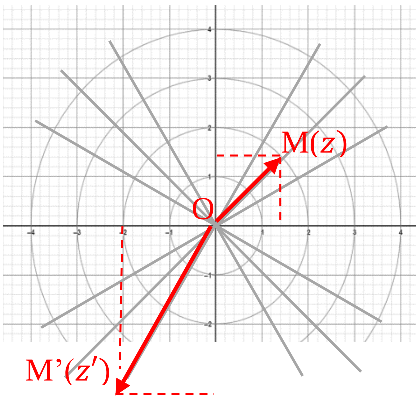


On repère sur le cercle trigonométrique l'angle $\theta$ correspondant :

On en déduit que : $\theta = \frac{-2\pi}{3}$

On a donc : $\boldsymbol{z' = 4\ e^{i\frac{-2\pi}{3}}}$

4) Tracer les vecteurs images OM et OM' de $z$ et $z'$, dans un repère (1 unité = 2 carreaux ou cm) en utilisant les résultats de la question précédente *(laisser les traits de construction, possibilité d'utiliser 1 compas).*




5) Donner la forme exponentielle de $z$ et de $z'$

On a donc : $z = 2\ e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z' = 4\ e^{i\frac{-2\pi}{3}}$

6) Calculer $\frac{z}{z'}$ sous forme exponentielle

$$\frac{z}{z'} = \frac{2\ e^{i\frac{\pi}{4}}}{4\ e^{i\frac{-2\pi}{3}}} = \frac{2}{4} \times \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{-2\pi}{3}}} = \frac{1}{2}\ e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{-2\pi}{3}\right)} = 0{,}5\ e^{i\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{8\pi}{12}\right)} = 0{,}5\ e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

7) Déduire des questions 3) et 7) que $\cos\left(\frac{11\,\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ . En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{11\,\pi}{12}\right)$. Vérifier l'exactitude de ces valeurs en comparant avec le résultat de la calculatrice. Retrouve t'on environ ces résultats sur un cercle trigo tracé à main levée ?

A partir de l'écriture exponentielle de $\frac{z}{z'}$, on peut retourner sur l'écriture algébrique en écrivant la forme trigonométrique :

$$\frac{z}{z'} = \frac{1}{2}\ e^{i\frac{11\pi}{12}}$$
$$= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

On tire de la question 2), la forme algébrique de ce même produit :

$$\frac{z}{z'} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8} + \frac{(\sqrt{6}\ -\sqrt{2})}{8}i$$

En comparant ces 2 expressions qui sont égales, on peut en déduire que :

$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$ et que $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{8}$

Soit en multipliant chacune de ces équations par 2 , on obtient :

$\boldsymbol{\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$ et $\boldsymbol{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$