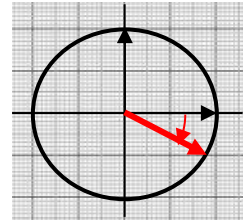


EXERCICE 1 : Soit les nombres complexes : $z_A = 2 e^{i \frac{-5\pi}{6}}$, $z_B = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}$, $z_C = 3 e^{i \frac{3\pi}{2}}$, $z_D = 2 e^{i \frac{2\pi}{3}}$

⇒ Donner les formes trigonométrique et algébrique de ces nombres.

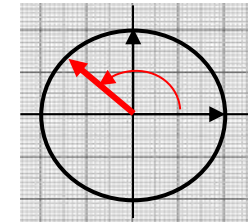
On a : $z_A = 2 e^{i \frac{-\pi}{6}}$.

On a donc : $z_A = 2 \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + 2 i \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} + 2i \frac{-1}{2} = \sqrt{3} - i$



On a d'autre part : $z_B = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}$

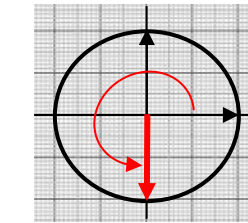
On a donc : $z_B = \sqrt{2} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2} i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$



Et donc : $z_B = -1 + i$

On a d'autre part : $z_C = 3 e^{i \frac{3\pi}{2}}$

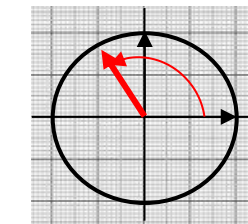
On a donc : $z_C = 3 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 3 i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 \times 0 + 3 i \times (-1)$



Et donc : $z_C = 0 - 3 i = -3i$

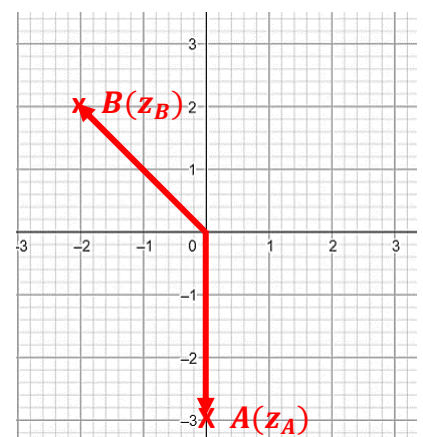
On a : $z_D = 2 e^{i \frac{2\pi}{3}}$.

On a donc : $z_D = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2 i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \frac{-1}{2} + 2i \frac{\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3} i$



EXERCICE 2 : Soit les nombres complexes : $z_A = -3i$ et $z_B = -2 + 2i$

- Tracer les vecteurs images de z_A et z_B dans un repère.
- Comment appelle-t-on le nombre complexe $\overline{z_B}$? Calculer le produit $z_B \times \overline{z_B}$
 $\overline{z_B} = -2 - 2i$ est le conjugué du nombre complexe z_B .
 $z_B \times \overline{z_B} = a^2 + b^2$
 $z_B \times \overline{z_B} = (-2 + 2i) \times (-2 - 2i) = (-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$
- Calculer sous forme algébrique $z_C = z_A \times z_B$ et $z_D = \frac{z_A}{z_B}$



On a :

$$z_C = z_A \times z_B = -3i (-2 + 2i) = 6i - 6i^2 = 6i + 6 = 6 + 6i$$

On a d'autre part :

$$z_D = \frac{z_A}{z_B} = \frac{-3i}{-2 + 2i} = \frac{-3i(-2 - 2i)}{(-2 + 2i)(-2 - 2i)} = \frac{6i + 6i^2}{(-2)^2 + 2^2} = \frac{6i - 6}{8}$$

$$z_D = -\frac{6}{8} + \frac{6}{8}i = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i = -0,75 + 0,75i$$

4- Déterminer sans justifier le module et l'argument de z_A . Donner l'écriture exponentielle de z_A

On voit graphiquement que $|z_A| = 3$ et que $\arg(z_A) = -\frac{\pi}{2}$. On a donc : $z_A = 3 e^{i \frac{-\pi}{2}}$

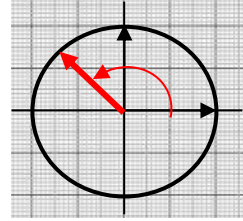
5- Déterminer le module et l'argument de z_B (tracer cercle trigo). Donner l'écriture exponentielle de z_B

On a : $|z_B| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$

Soit $\theta = \arg(z_B)$

On a : $\cos(\theta) = \frac{a}{|z_B|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$\sin(\theta) = \frac{b}{|z_B|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



On repère sur le cercle trigonométrique l'angle θ correspondant :

On en déduit que :

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

On a donc :

$$z_A = 2\sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

6- Calculer sous forme exponentielle $z_C = z_A \times z_B$ et $z_D = \frac{z_A}{z_B}$

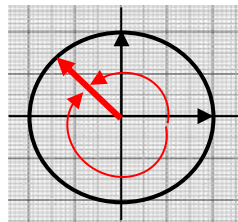
$$z_C = z_A \times z_B = 3 e^{i \frac{-\pi}{2}} \times 2\sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}} = 6\sqrt{2} e^{i (\frac{-\pi}{2} + \frac{3\pi}{4})} = 6\sqrt{2} e^{i (\frac{-2\pi}{4} + \frac{3\pi}{4})} = 6\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

$$z_D = \frac{z_A}{z_B} = \frac{3 e^{i \frac{-\pi}{2}}}{2\sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \times \frac{e^{i \frac{-\pi}{2}}}{e^{i \frac{3\pi}{4}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} e^{i (\frac{-\pi}{2} - \frac{3\pi}{4})} = \frac{3}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{5\pi}{4} i}$$

7- Montrer que : $z_D = \frac{3\sqrt{2}}{4} e^{\frac{3\pi}{4} i}$

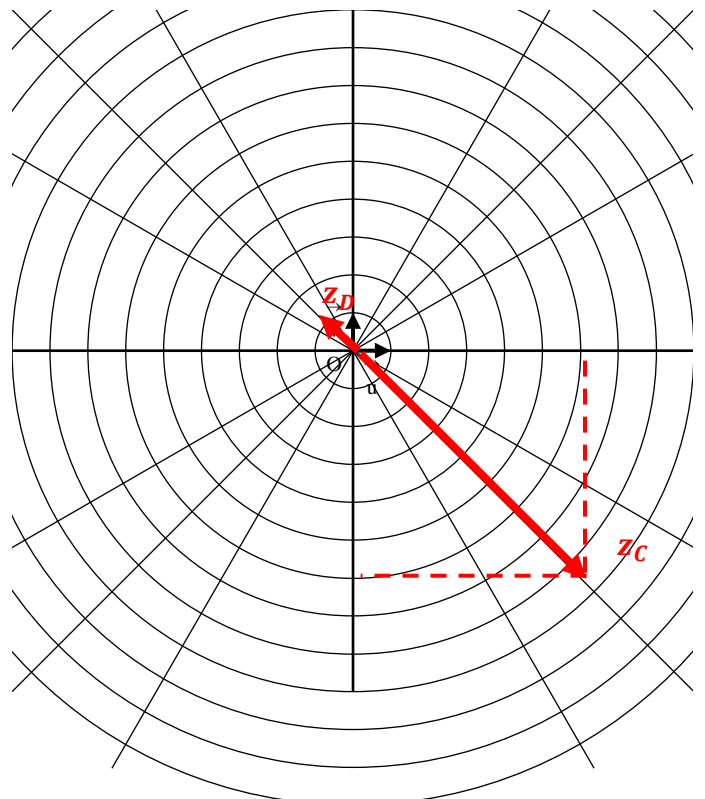
On a : $\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2 \times 2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$-\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ repèrent le même point sur le cercle trigonométrique



On peut donc dire que : $z_D = \frac{3\sqrt{2}}{4} e^{\frac{3\pi}{4} i}$

8- Tracer les vecteur images de z_C et z_D dans le plan complexe ci-contre. Les résultats sous forme exponentielle (question 6) et algébrique (question 3) sont-ils cohérents ?



EXERCICE 3 : On considère les nombres complexes $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = 1 + i$

1) Calculer $z \times z'$ sous forme algébrique et montrer que : $z \times z' = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

$$\begin{aligned} z \times z' &= (\sqrt{3} + i)(1 + i) = \sqrt{3} + \sqrt{3}i + i + i^2 \\ &= \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1) - 1 \\ &= (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

2) Calculer module et argument de z et de z' en donnant les étapes du calcul (avec cercle trigo à main levée) et écrire ces nombres sous forme exponentielle.

Pour $z = \sqrt{3} + i$:

$$\text{On a : } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2$$

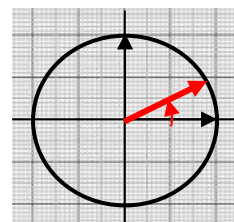
Soit $\theta = \arg(z)$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad \cos(\theta) &= \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{b}{|z|} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On repère sur le cercle trigonométrique l'angle θ correspondant :

$$\text{On en déduit que : } \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{On a donc : } \quad z = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$$



Pour $z' = 1 + i$:

$$\text{On a : } |z'| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

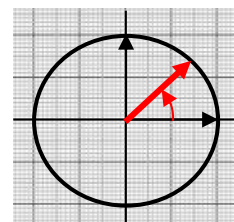
Soit $\theta = \arg(z')$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \quad \cos(\theta) &= \frac{a}{|z'|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) &= \frac{b}{|z'|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

On repère sur le cercle trigonométrique l'angle θ correspondant :

$$\text{On en déduit que : } \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{On a donc : } \quad z' = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$



3) Calculer $z \times z'$ sous forme exponentielle

$$z \times z' = 2 e^{i\frac{\pi}{6}} \times \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})} = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12})}$$

$$\text{On a donc : } \quad z \times z' = 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

4) Dédurre des questions précédentes que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. En déduire la valeur de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

A partir de l'écriture exponentielle de $z \times z'$, on peut retourner sur l'écriture algébrique en écrivant la forme trigonométrique :

$$\begin{aligned} z \times z' &= 2\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} \\ &= 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

On tire de la 1^{ère} question, la forme algébrique de ce même produit : $z \times z' = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

En comparant ces 2 expressions qui sont égales, on peut en déduire que :

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = (\sqrt{3} - 1) \quad \text{et que} \quad 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = (\sqrt{3} + 1)$$

Soit en divisant chacune de ces équations par $2\sqrt{2}$, on obtient :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$$

En multipliant par $\sqrt{2}$ numérateur et dénominateur, on a finalement :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$

$$\text{Soit :} \quad \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$