Td **FONCTIONS LOGARITHMES**

EXERCICE 1.: Exprimer en fonction de $\ln(2)$ les nombres suivants :

a) $\ln(8)$; *b)* $\ln(8)+\ln(32)$; *c)* $\ln(64)-\ln(4)$; *d)* $\ln(16)-3\ln(2)$

EXERCICE 2.: Sans calculatrice, calculer :

a) $\ln(e^3)$; b) $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$; c) $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$

EXERCICE 3.: On donne $\ln(2) \approx 0{,}69$ et $\ln(5) \approx 1{,}61$. Sans calculatrice, en déduire les valeurs approchées de :
a) $\ln(10)$; b) $\ln(0{,}1)$; c) $\ln(0{,}2)$; d) $\ln(20)$

EXERCICE 4.: Exprimer en fonction de $\ln(2)$ le nombre $a = 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) + \ln(8)$

EXERCICE 5.: 1- En remarquant que $\left(\sqrt{e}\right)^2 = e$, montrer que $\ln\left(\sqrt{e}\right) = 0{,}5$

2- Exprimer en fonction de $\ln(3)$ le nombre $a = \ln(9e) + \ln(3\sqrt{e})$

EXERCICE 6.: a et b sont deux nombres strictement positifs. Exprimer en fonction de $\ln(a)$ et de $\ln(b)$ les nombres suivants :

a) $\ln(a^4)$; b) $\ln(a^{-3})$; $\ln(a^2 b)$; d) $\ln\left(\frac{a^3}{b^2}\right)$

EXERCICE 7.: On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln(6x)$

1- Tracer à l'écran de la calculatrice les courbes représentatives C et C' de f et g pour $0 < x < 10$ et $-5 < y < 5$
2- Il semble que l'on peut obtenir C' à partir d'une translation. Justifier cette observation.

EXERCICE 8.: On considère les fonctions f et g définies sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

1- Tracer à l'écran de la calculatrice les courbes représentatives C et C' de f et g pour $0 < x < 10$ et $-5 < y < 5$
2- A l'aide la da procédure Trace de la calculatrice, parcourir la courbe représentative de f. Il semble que l'on peut obtenir C' à partir d'une symétrie. Justifier cette observation.

EXERCICE 9.: Simplifier au maximum :

(a) $\mathbf{A} = ln(ab) + ln(\frac{a}{b}) - ln(a^2) + lne$

(b) $\mathbf{B} = ln(\frac{1}{a}) + ln(a^4) - ln(a^3) + ln1$

(c) $\mathbf{C} = ln(a+b) + ln(a-b) - ln(a^2-b^2)$

(d) $\mathbf{D} = ln(e^2) + 2ln(\sqrt{e}) - ln(\frac{1}{e}) + ln(\frac{2}{e}) + ln(\frac{e}{2}) - 4$

EXERCICE 10.: 100 € sur un compte de dépôt bancaire dont les intérêts sont à 2 % par an. Au bout de n années, il y a (100×1.02^n) d'€ sur le compte. Combien d'années faut-il pour que la somme sur le compte dépasse les 5000 € ?

EXERCICE 11.: Ecrire sous forme d'un seul logarithme

(a) $\mathbf{A} = 2ln3 - ln5$

(b) $\mathbf{B} = 3ln10 + ln0,08 - 5ln2$

(c) $\mathbf{C} = \frac{1}{2}ln4 - 3ln2$

(d) $\mathbf{D} = 2ln5 - 3ln2 + \frac{1}{2}ln100$

EXERCICE 12.:

10000 bactéries par ml de sang. Après administration d'un antibiotique, ce nombre baisse de 0.5 % par minute. Au bout de n minutes, il y a ($10000 \times (1 - \frac{0.5}{100})^n$) de bactéries par ml de sang. Combien de minutes faut-il attendre pour que le nombre de bactéries par ml soit inférieur à 1 ?

EXERCICE 13.: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a. $e^x = 2$ b. $e^x = 5{,}3$ c. $e^x = 10$

EXERCICE 14.: Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ les équations suivantes.

a. $\ln(x) = 5$ b. $3\ln(x) = -2$ c. $\ln(x) = \dfrac{7}{4}$

EXERCICE 15.: La température dans une habitation est de 20°C. On éteint le chauffage au temps $t = 0$. La température extérieure est supposée être constante et égale à 11 °C. On admet que la fonction f suivante, permet de connaître la température (en °C) au temps t exprimé en heures. Pour $t \in [0\,;\,+\infty[\quad ;\ f(t) = 9\,e^{-0.1\,t} + 11$

1- Déterminer la limite de la fonction f pour $t \to +\infty$
2- Calculer $f'(t)$ et donner le tableau de variation de cette fonction
3- Résoudre l'équation $f(t) = 15{,}5$ afin de déterminer le temps pour que la température atteigne les 15,5°C. Vérifier le résultat. Vérifier le résultat en traçant la courbe sur calculatrice.

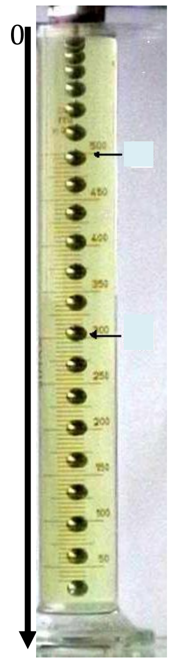
EXERCICE 16.: On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0{,}2\,;1]$ par $f(x) = -8\,310\ln(x)$.

Tant qu'un organisme est vivant, la quantité de carbone 14 qu'il contient est constante. Après sa mort, cette quantité diminue. La mesure de la quantité de carbone 14 restant permet de dater les organismes qui contiennent du carbone, à condition qu'ils datent de moins de 50 000 ans.

On appelle x la fraction de carbone 14 restant dans un organisme fossilisé. On admet que $f(x)$ permet de modéliser l'âge, en années, du fossile.

1. Calculer l'âge d'un fossile qui contient encore 35 % de son carbone 14. Arrondir à la centaine d'années.

2. Déterminer la fraction de carbone 14 restant dans un fossile vieux de 15 000 ans.



EXERCICE 17.: A l'instant $t = 0$, une bille est lâchée sans vitesse initiale, dans une éprouvette de 80 cm de haut, remplie d'huile.

On note $v(t)$ la vitesse instantanée de cette bille en cm/s, au temps t, exprimé en secondes. On admet que :

$$\text{pour}\quad t \in [0\,;\,+\infty[\quad ;\quad v(t) = 12 - 12\,e^{-0{,}4\,t}$$

La bille étant lâchée sans vitesse initiale au temps $= 0$, on a : $v(0) = 0$

1- Déterminer la limite de la fonction v pour $t \to +\infty$
2- Calculer $v'(t)$ et donner le tableau de variation de cette fonction
3- Résoudre l'équation $v(t) = 10{,}8$ afin de déterminer le temps pour que la vitesse atteigne les 10,8 cm/s. Vérifier le résultat en traçant la courbe sur calculatrice.