Exercice 76 p 33 :

76 Capacités 1 3 4

ABCD est un carré de centre O. I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [OD].

1. Justifier que le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé.

2. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, dans ce repère.

3. Calculer les coordonnées des points O, I et J.

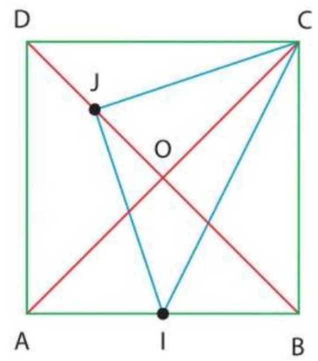
4. Calculer les longueurs CI, CJ et IJ.

5. En déduire la nature du triangle CIJ.

6. Calculer au degré près la mesure de l'angle $\widehat{CIJ}$.

7. Déterminer la distance entre J et la droite (IC).

Bonus. Déterminer la distance entre B et la droite (IC).



CORRIGE

1. Justifier que le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé.

Un repère orthonormé est composé de 2 vecteurs de même norme et orthogonaux. Ici les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont bien de même norme car les cotés d'un carré sont de même longueur. Ces 2 vecteurs sont orthogonaux car 2 cotés adjacents d'un carré sont perpendiculaires. On peut donc dire que le repère $(A;\ \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé. On pourrait dire que le repère est $(A;\ \vec{\imath};\vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath}=\overrightarrow{AD}$

2. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, dans ce repère.

A, B, C, D repérant les sommets du carré, les coordonnées de ces points sont $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ 1)$ et $D(0\ ;\ 1)$.

3. Calculer les coordonnées des points O, I et J.

-

O est le milieu de $[AC]$. On a donc $O\left(\frac{x_A+x_C}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_C}{2}\right)$ donc $O\left(\frac{0+1}{2}\ ;\ \frac{0+1}{2}\right)$ donc $O\ (0{,}5\ ;\ 0{,}5)$

I est le milieu de $[AB]$. On a donc $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{0+1}{2}\ ;\ \frac{0+0}{2}\right)$ donc $I\ (0{,}5\ ;\ 0)$

J est le milieu de $[OD]$. On a donc $J\left(\frac{x_O+x_D}{2}\ ;\ \frac{y_O+y_D}{2}\right)$ donc $J\left(\frac{0{,}5+0}{2}\ ;\ \frac{0{,}5+1}{2}\right)$ donc $J\ (0{,}25\ ;\ 0{,}75)$

4. Calculer les longueurs CI, CJ et IJ.

En utilisant la formule de la norme d'un vecteur, on a :

$$CI=\sqrt{(x_I-x_C)^2+(y_I-y_C)^2}=\sqrt{(0{,}5-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{(-0{,}5)^2+(-1)^2}=\sqrt{0{,}25+1}=\sqrt{1{,}25}$$

$$CJ=\sqrt{(x_J-x_C)^2+(y_J-y_C)^2}=\sqrt{(0{,}25-1)^2+(0{,}75-1)^2}=\sqrt{(-0{,}75)^2+(-0{,}25)^2}=\sqrt{0{,}625}$$

$$IJ=\sqrt{(x_J-x_I)^2+(y_J-y_I)^2}=\sqrt{(0{,}25-0{,}5)^2+(0{,}75-0)^2}=\sqrt{(-0{,}25)^2+0{,}75^2}=\sqrt{0{,}625}$$

5. En déduire la nature du triangle CIJ.

On constate que $CJ = IJ$, le triangle CIJ est donc isocèle en J. D'autre part, on voit que :

$$CJ^2 + IJ^2 = \left(\sqrt{0{,}625}\right)^2 + \left(\sqrt{0{,}625}\right)^2 = 0{,}625 + 0{,}625 = 1{,}25$$

$$CI^2 = \left(\sqrt{1{,}25}\right)^2 = 1{,}25$$

On a donc l'égalité $CJ^2 + IJ^2 = CI^2$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore appliquée sur le triangle CIJ , on peut affirmer que ce triangle est rectangle en J.

Finalement, on peut dire que le triangle CIJ est isocèle et rectangle en J.

6. Calculer au degré près la mesure de l'angle $\widehat{CIJ}$.

On peut utiliser une des formules de trigonométrie :

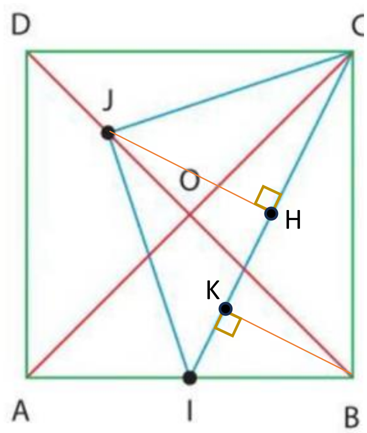
$$\cos\left(\widehat{CIJ}\right) = \frac{adj}{hyp} = \frac{IJ}{CI} = \frac{\sqrt{0{,}625}}{\sqrt{1{,}25}} = \sqrt{\frac{0{,}625}{1{,}25}} = \sqrt{0{,}5} \quad \text{, on a donc } \widehat{CIJ} = \arccos\left(\sqrt{0{,}5}\right) = 45°$$

$$\sin\left(\widehat{CIJ}\right) = \frac{opp}{hyp} = \frac{CJ}{CI} = \frac{\sqrt{0{,}625}}{\sqrt{1{,}25}} = \sqrt{\frac{0{,}625}{1{,}25}} = \sqrt{0{,}5}\text{, on a donc } \widehat{CIJ} = \arcsin\left(\sqrt{0{,}5}\right) = 45°$$

$$\sin\left(\widehat{CIJ}\right) = \frac{opp}{adj} = \frac{CJ}{IJ} = \frac{\sqrt{0{,}625}}{\sqrt{0{,}625}} = \sqrt{\frac{0{,}625}{0{,}625}} = \sqrt{1} = 1\text{, on a donc } \widehat{CIJ} = \arctan(1) = 45°$$

On peut aussi utiliser le fait que CIJ soit isocèle. Ainsi les angles $\widehat{JCI}$ et $\widehat{CIJ}$ sont égaux. Comme CIJ est rectangle en J, on a $\widehat{IJC} = 90°$.
Comme la somme des angles est égale à 180 ° on a 2 $\widehat{CIJ} = 180° - 90° = 90°$. On a donc $\widehat{CIJ} = 45°$

7. Déterminer la distance entre J et la droite (IC).



Les coté $[IJ]$ et $[JC]$ sont perpendiculaires car CIJ est rectangle en J. L'aire $\mathcal{A}$ du triangle CIJ est donc :

$$\mathcal{A} = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{IJ \times CJ}{2} = \frac{\sqrt{0{,}625} \times \sqrt{0{,}625}}{2} = \frac{0{,}625}{2} = 0{,}3125$$

Soit H le projeté orthogonal de J sur (IC) . On a $(JH) \perp (IC)$. L'aire $\mathcal{A}$ de CIJ peut donc aussi être calculée en prenant comme base, le coté IC .

$$\mathcal{A} = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{IC \times JH}{2} = \frac{\sqrt{1{,}25} \times JH}{2}$$

Finalement, on obtient l'égalité :

$$\frac{\sqrt{1{,}25} \times JH}{2} = 0{,}3125$$

$$\sqrt{1{,}25} \times JH = 0{,}625$$

La distance entre J et la droite (IC) est donc : $JH = \frac{0{,}625}{\sqrt{1{,}25}} \approx 0{,}559$

Bonus. Déterminer la distance entre B et la droite (IC).

Les coté $[IB]$ et $[BC]$ du triangle CIB sont perpendiculaires car $ABCD$ est un carré. L'aire $\mathcal{A}$ du triangle CIB est donc :

$$\mathcal{A} = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{IB \times BC}{2} = \frac{0{,}5 \times 1}{2} = 0{,}25$$

Soit K le projeté orthogonal de B sur (IC) . On a $(BK) \perp (IC)$. L'aire $\mathcal{A}$ de CIB peut donc aussi être calculée en prenant comme base le coté IC.

$$\mathcal{A} = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{IC \times BK}{2} = \frac{\sqrt{1{,}25} \times BK}{2}$$

Finalement, on obtient l'égalité : $\frac{\sqrt{1{,}25} \times BK}{2} = 0{,}25$.

La distance entre B et la droite (IC) est donc : $BK = \frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}25}} \approx 0{,}44$