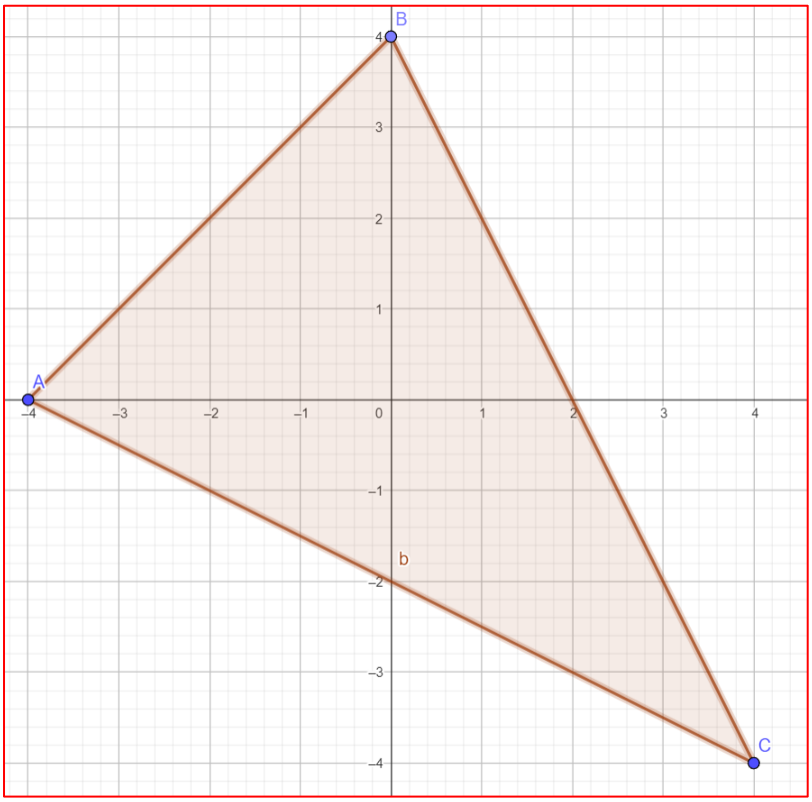
Dm – Maths **Les vecteurs**

<u>A rédiger sur feuille de copie</u>. Les tracés sont à faire sur le repère distribué qui est à l'échelle 2 : 1 , l'unité graphique sur l'axe des abscisses et des ordonnées mesure 2 cm. **Ce repère est à COLLER sur la feuille de copie**.

Soit les points $A(-4\,;0)$, $B(0\,;4)$ et $C(4\,;\,-4)$.

1- Tracer le triangle ABC . Mesurer à la règle les 3 côtés de ce triangle et en déduire les distances AB , BC et CA ***(diviser les longueurs mesurées par 2 car l'unité dans le repère ci-dessous vaut 2 cm)***. ABC est-il isocèle, équilatéral, rectangle ?



On mesure les distances AB , BC et CA.
On trouve approximativement :

- $AB \approx 5{,}7\ cm$
- $BC \approx 8{,}9\ cm$
- $CA \approx 8{,}9\ cm$

On peut faire la conjecture que le triangle ABC est isocèle.

Calculer à présent ces mêmes distances en utilisant les coordonnées des points : donner la valeur exacte sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b étant des entiers) **et** une valeur approchée au centième (à 0,01 près).

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(0-(-4))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{4^2 \times 2} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$
$$AB = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$$

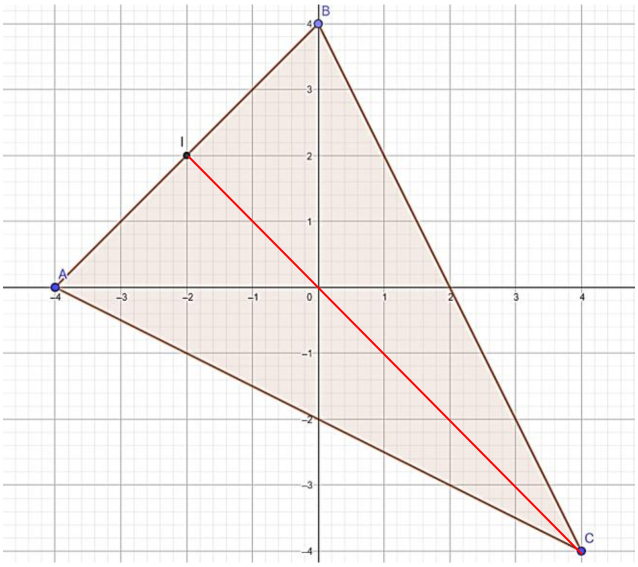
$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (-4-4)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$$
$$BC = \sqrt{4 \times 20} = \sqrt{4 \times 4 \times 5} = \sqrt{4^2 \times 5} = \sqrt{4^2} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}94$$

$$CA = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-4-4)^2 + (0-(-4))^2} = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$$
$$CA = 4\sqrt{5} \approx 8{,}94$$

On retrouve bien des longueurs BC et AC qui sont égales. Le triangle ABC est donc bien isocèle en C.

2- Tracer le point I milieu du segment $[AB]$. Calculer en utilisant la formule du cours (Vecteurs-partie 2), les coordonnées précise du point I .

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



Les coordonnées du point milieu sont :

$$I(\frac{x_A + x_B}{2} , \quad \frac{y_A + y_B}{2})$$

$$I(\frac{-4+0}{2} , \quad \frac{0+4}{2})$$

$$I(\frac{-4}{2} , \quad \frac{4}{2})$$

$$I(-2 , \quad 2)$$

Ce résultat est cohérent avec le tracé graphique.

3- Mesurer à la règle la distance CI ***(diviser les longueurs mesurées par 2 car l'unité dans le repère ci-dessous vaut 2 cm)***. Calculer à présent CI en utilisant les coordonnées des points : donner la valeur exacte sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b étant des entiers) **et** une valeur approchée au centième.

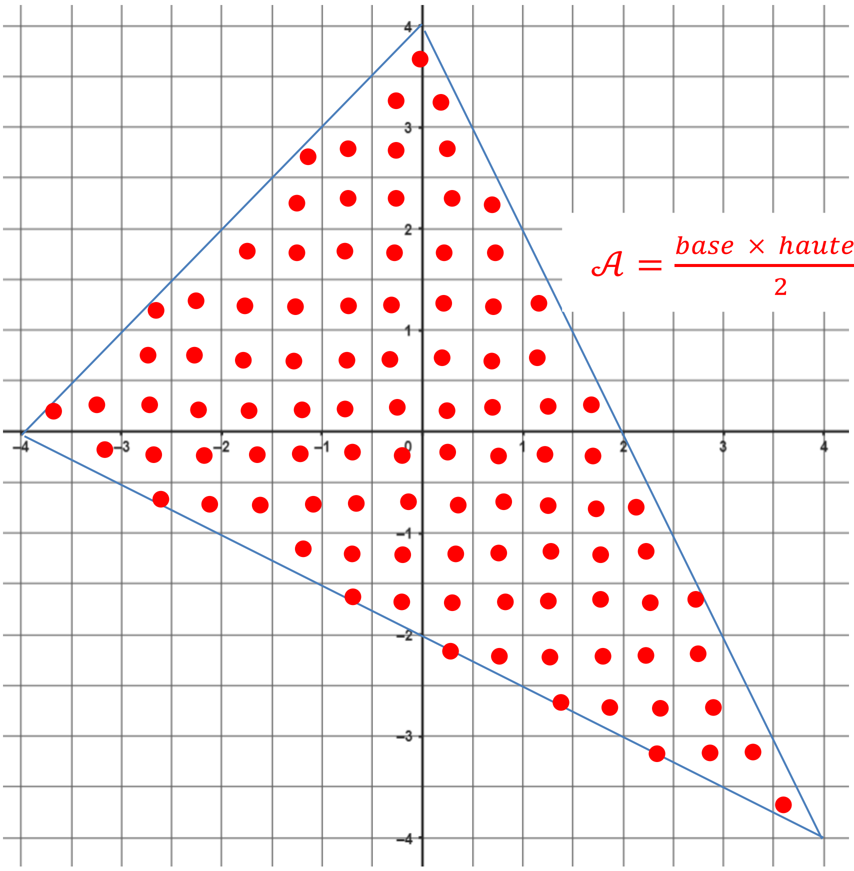
En mesurant à la règle la distance CI on mesure approximativement : $CI \approx 8{,}5\ cm$

Par calcul, on obtient :

$$CI = \sqrt{(x_I - x_C)^2 + (y_I - y_C)^2} = \sqrt{((-2) - 4)^2 + (2 - (-4))^2} = \sqrt{(-6)^2 + 6^2} = \sqrt{6^2 + 6^2}$$

$$CI = \sqrt{6^2} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \approx 8{,}49$$

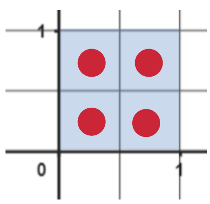
4- Utiliser les longueurs AB et CI calculées pour déterminer à présent l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC . Donner un résultat exact.



Le triangle ABC étant isocèle en C, la droite (CI) est une **médiane**, mais aussi ici, la **hauteur** issue de C de ce triangle. Ainsi l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est :

$$\mathcal{A} = \frac{base \ \times \ hauteur}{2} = \frac{AB \times CI}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{2} = \frac{4 \times 6 \times 2}{2} = 24$$

5- Sur le tracé réalisé, une aire de 1 cm² correspond à 4 carreaux du quadrillage. On a en effet $4 \times 0{,}5^2 = 4 \times 0{,}25 = 1$. Tracer un point dans chacun des carreaux qui sont à l'intérieur du triangle. Compter leur nombre et le diviser par 4. Comparer cette valeur avec la valeur de $\mathcal{A}$ calculée précédemment, retrouve-t-on à peu près le même résultat ?



On compte environ 100 carreaux, ce qui nous donne une aire mesurée d'environ $A \approx 25$

6- Tracer la hauteur h issue de B dans le triangle ABC (droite passant par B et perpendiculaire au coté $[AC]$). Mesurer à la règle cette longueur h (ne pas oublier de diviser par 2 la mesure).
On mesure que $h \approx 5{,}4\ cm$

7- L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC **peut aussi s'exprimer** en fonction des longueurs h et AC . Utiliser les valeurs **exactes de $\mathcal{A}$ et AC** déjà calculées dans les questions précédentes, pour retrouver cette fois-ci par calcul, la valeur de h. Le résultat est-il cohérent avec la mesure faite précédemment ?

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est aussi égale à :

$$\mathcal{A} = \frac{base \ \times \ hauteur}{2} = \frac{h \times AC}{2} = \frac{h \times 4\sqrt{5}}{2} = h \times 2\sqrt{5}$$

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC a déjà été calculée : $\mathcal{A} = 24$

Finalement on obtient l'équation :

$$h \times 2\sqrt{5} = 24$$

Soit :

$$h = \frac{24}{2\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5} \approx 5{,}37cm$$

Sur calculatrice :

$$\frac{24}{2\sqrt{5}}$$

$$\frac{12\sqrt{5}}{5}$$

Le résultat est cohérent avec la valeur mesurée.