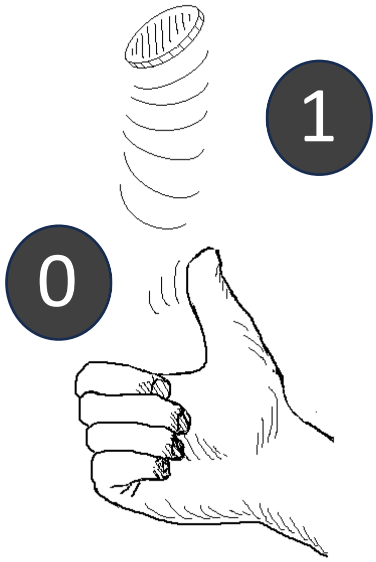
DS – 2nd 1 **_Probabilités – Fonction inverse - Puissances_**

Nom :

Exercice 1. *Probabilités*



Un jeton bien équilibré porte les chiffres 0 et 1 sur ses faces. On lance ce jeton 3 fois de suite. La notation des issues sera la suivante : si par exemple, le premier lancer donne 0, le second 1 et le troisième 1, l'issue sera notée $(0\,,1\,,1)$.

On définit les évènements A et B suivants.

- Evènement A : « le produit des 3 chiffres obtenus n'est pas nul »
- Evènement B : « la somme des 3 chiffres obtenus est égale à 2 »

1- Ecrire une phrase qui définit ce qu'est l'univers Ω

L'univers Ω est l'ensemble des issues possibles suite à la réalisation de cette expérience aléatoire.

2- Donner toutes les issues que contient cet ensemble : $\Omega = \{\,(0\,,0\,,0)\,;\,\dots.\}$

$\Omega = \{\,(0\,,0\,,0)\,;\;(0\,,0\,,1)\;;\;(0\,,1\,,0)\;;\;(0\,,1\,,1)\;;(1\,,0\,,0)\,;\;(1\,,0\,,1)\;;\;(1\,,1\,,0)\;;\;(1\,,1\,,1)\}$

3- Donner toutes les issues que contient l'ensemble A : $\mathrm{A} = \{\,\dots.\}$

$\mathrm{A} = \{\,(1\,,1\,,1)\}$

4- Donner toutes les issues que contient l'ensemble B : $\mathrm{B} = \{\,\dots.\}$

$\mathrm{B} = \{\,(0\,,1\,,1)\;;\;(1\,,0\,,1)\;;\;(1\,,1\,,0)\,\}$

5- Donner toutes les issues que contient l'ensemble $\bar{A} \cap \bar{B}$: $\bar{A} \cap \bar{B} = \{\,\dots.\}$

$\bar{A} \cap \bar{B} = \{(0\,,0\,,0)\,;\;(0\,,0\,,1)\;;\;(0\,,1\,,0)\;\;;(1\,,0\,,0)\}$

6- Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(\bar{A} \cap \bar{B})$.

$$p(A) = \frac{nombre\ d'issues\ de\ A}{nombre\ d'issues\ de\ \Omega} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

$$p(B) = \frac{nombre\ d'issues\ de\ B}{nombre\ d'issues\ de\ \Omega} = \frac{3}{8} = 0{,}375$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{nombre\ d'issues\ de\ \bar{A} \cup \bar{B}}{nombre\ d'issues\ de\ \Omega} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

7- Un jeu d'argent est organisé. Pour jouer il faut donner 5 €. Si l'évènement A se produit, le joueur reçoit x €. Si l'évènement B se produit, le joueur reçoit 7 €. Si ni A, ni B se produisent, le joueur perd sa mise.
On suppose que 1000 personnes jouent. L'organisateur du jeu engrange ainsi 5000 €. Calculer le gain x pour que le jeu soit équilibré, c'est-à-dire pour que l'organisateur du jeu restitue les 5000 € engrangés en gains.

Sur les 1000 parties :

- L'évènement A se produit en moyenne $0{,}125 \times 1000 = 125$ fois. Les gains sont de $125\,x$.
- L'évènement B se produit en moyenne $0{,}375 \times 1000 = 375$ fois. Les gains sont de $375 \times 7 = 2625$
- L'évènement $\bar{A} \cap \bar{B}$ se produit en moyenne $0{,}5 \times 1000 = 500$ fois. Aucun gain.

Comme le total des gains doit être de 5000 €, on obtient l'équation $125\,x + 2625 = 5000$

On a donc : $125\,x = 2375$ et donc $x = \frac{2375}{125} = 19$.

Le gain x doit être de 19 €.

Exercice 2. *Fonction inverse*

1- Donner le tableau de variation de la fonction inverse.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $\frac{1}{x}$	↘	$\|\|$	↘

2- Comparer sans aucun calcul les nombres $\frac{1}{0,3}$ et $\frac{1}{0,4}$. Justifier.

Comme $0,3 < 0,4$ et comme la fonction inverse est décroissante si x est positif, on a $\frac{1}{0,3} > \frac{1}{0,4}$

3- Donner sous forme de fraction, l'inverse du nombre $\frac{5}{2025}$

L'inverse du nombre $\frac{5}{2025}$ est $\frac{2025}{5} = 405$

4- Quelle est le résultat de la division du nombre $\frac{a}{b}$ par le nombre $\frac{c}{d}$?

Diviser c'est multiplier par l'inverse. Ainsi $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$

5- Donner un encadrement de $\frac{1}{x}$ pour $x \in [-4\ ;\ -0,5]$. Justifier en commençant le raisonnement par :

Si $-4 \leq x \leq -0,5$ alors ....

Si $-4 \leq x \leq -0,5$ alors $\frac{1}{-4} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{-0,5}$ car la fonction inverse est décroissante si x est négatif.

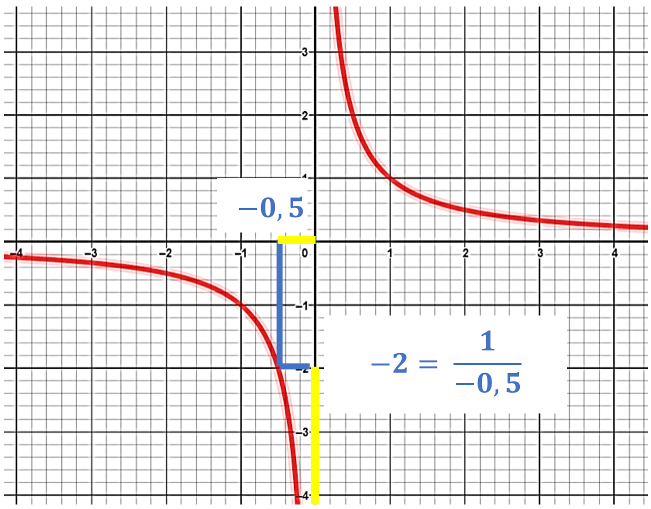
On a donc $-0,25 \geq \frac{1}{x} \geq -2$ et ainsi $\frac{1}{x} \in [-2\ ;\ -0,25]$

6- On donne ci-contre, la courbe de la fonction inverse. Compléter la phrase suivante :

$\frac{1}{x} \leq -2$ si et seulement si $\ldots \leq x < \cdots\ldots$.

Pour justifier, repérer uniquement sur les axes, les zones concernées.

$\frac{1}{x} \leq -2$ si $-0,5 \leq x < 0$



Exercice 3. *Puissance d'un nombre*

Ecrire sous la forme d'une puissance les nombres suivants : $A = (10^{-2})^3 \times 10^4$, $B = \frac{5^3}{5^6}$ et $C = \frac{(4x)^2 \times x^{-4}}{x^3}$.

$$A = (10^{-2})^3 \times 10^4 = 10^{-2\times 3} \times 10^4 = 10^{-6} \times 10^4 = 10^{-2}$$

$$B = \frac{5^3}{5^6} = 5^{3-6} = 5^{-3}$$

$$C = \frac{(4x)^2 \times x^{-4}}{x^3} = \frac{16\,x^2 \times x^{-4}}{x^3} = \frac{16\,x^{2-4}}{x^3} = \frac{16\,x^{-2}}{x^3} = 16\,x^{-2-3} = 16\,x^{-5}$$

Exercice 4. *Probabilités*

Dans une classe de seconde de 32 élèves, 11 élèves jouent au foot et 8 prennent des cours de musique. 3 pratiquent les deux activités. On interroge un élève de cette classe au hasard. On définit les évènements F et M suivants.

- Evènement F : « l'élève interrogé joue au foot ». Ainsi $p(F) = \frac{11}{32}$.
- Evènement M : « l'élève interrogé prend des cours de musique » . Ainsi $p(M) = \frac{8}{32}$.

1- Donner la probabilité $p(F \cap M)$.

$p(F \cap M) = \frac{3}{32}$

2- Donner la probabilité $p(F \cup M)$. Justifier en utilisant la propriété vue en cours.

$p(F \cup M) = p(F) + p(M) - p(F \cap M) = \frac{11}{32} + \frac{8}{32} - \frac{3}{32} = \frac{16}{32}$

3- Donner la probabilité $p(\bar{F})$. Justifier en utilisant la propriété vue en cours.

$p(\bar{F}) = 1 - p(F) = 1 - \frac{11}{32} = \frac{32}{32} - \frac{11}{32} = \frac{21}{32}$

Exercice 5. *Fonction inverse*

Un nombre A est écrit en fonction de x : $A = \frac{2}{2x-3} + 4$

1- Donner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le nombre A peut être calculé.

Le dénominateur doit être non nul. On a $2x - 3 = 0$, si $2x = 3$, soit si $x = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

x ne pourra donc pas prendre la valeur 1,5. Cette valeur est interdite pour le calcul du nombre A.

Donc le nombre A peut être calculé si $x \in \,]-\infty\,;1{,}5\,[\;\cup\;]1{,}5\,;\,+\infty[$

2- Ecrire ce nombre sous la forme d'un quotient.

$$A = \frac{2}{2x-3} + 4 = \frac{2}{2x-3} + \frac{4\,(2x-3)}{(2x-3)} = \frac{2 + 8x - 12}{(2x-3)} = \frac{8x-10}{2x-3}$$

3- Ecrire l'inverse de A sous la forme d'un quotient.

$$\frac{1}{A} = \frac{2x-3}{8x-10}$$

Exercice 6. Problème

Si n est un entier naturel ($n \in \mathbb{N}$), pour quelle valeur de n a-t-on :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \times \ldots\ldots\ldots \times \frac{1}{1-\frac{1}{n-1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 2025 \quad ?$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \times \ldots\ldots\ldots \times \frac{1}{1-\frac{1}{n-1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 2025$$

On multiplie les fractions du membre de gauche :

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) \times \ldots\ldots.\times.(1-\frac{1}{n-1})(1-\frac{1}{n})} = 2025$$

On inverse les membres de droite et de gauche :

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) \times \ldots\ldots.\times.\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2025}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \ldots\ldots..\times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2025}$$

On retrouve les mêmes facteurs au dénominateur et au numérateur. En simplifiant, cela donne :

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2025}$$

On doit donc avoir $n = 2025$