Chapitre 10 - Colinéarité des vecteurs

# **Colinéarité de vecteurs :**

Définition : Deux vecteurs et sont **colinéaires** s’il existe un nombre réel tel que

Propriété : Deux vecteurs et non nuls sont **colinéaires** si et seulement si, ils ont la même direction.



# **Application : démontrer un parallélisme en utilisant les coordonnées**

Un écran de 1400 px de large et 800 px de hauteur, est muni d’un repère dont l’origine de trouve en son centre. L’unité graphique est le pixel.

100

100

Dans un contexte de jeu vidéo, les points , , et de coordonnées , et sont affichés sur l’écran. Pour que ce jeu vidéo fonctionne correctement, il est nécessaire de savoir si les segments et sont parallèles.

Pour répondre à cette question, on calcule les coordonnées des vecteurs et . On s’intéressera ensuite à la colinéarité de ces vecteurs.

Les vecteurs et sont-ils colinéaires ? Existe-t-il un nombre qui permettent de dire que  ?

Si ce nombre existe, on doit avoir :

Et ce nombre devrait vérifier ces 2 relations :

Ce qui donnerait pour  :

Finalement est solution des 2 équations. On peut donc écrire que  .

En conclusion, on peut dire que :

* + - * + Les segments et sont parallèles.
				+ Le segment est 12 fois plus grand que .

# **Application : démontrer un parallélisme sans coordonnées**



Soit un triangle ACB quelconque, donné ci-contre. I est le milieu du coté , J est le milieu de .

Peut-on démontrer vectoriellement que le segment est toujours parallèle au coté  ?

Pour répondre à cette question, on s’intéresse à la colinéarité des vecteurs et . Contrairement à ce qui a été fait dans le paragraphe précédent, on se propose ici, de ne pas utiliser les coordonnées pour démontrer qu’il existe un nombre qui permettent de dire que

⇨ On exploite tout d’abord le fait que I et J sont les milieux respectifs de et . Vectoriellement, cela se traduit pas les relations vectorielles :

⇨ On écrit une relation de Chasles sur le vecteur afin de faire apparaitre le vecteur  :

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

En conclusion, on a pu établir que . Ainsi quel que soit la taille du triangle, on aura toujours :

* + - * + Les segments et qui seront parallèles.
				+ Le segment sera toujours 2 fois plus petit que .

Propriété : Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs et sont colinéaires.

# **Déterminant de 2 vecteurs**

Soit 2 vecteurs et de coordonnées et dans une base  du plan.

Ces 2 vecteurs sont colinéaires, s’il existe un nombre tel que  .

Ce qui donne avec les coordonnées : .

On doit donc avoir et en même temps .

Si on suppose que et sont différents de 0, cela donne  et .

Les 2 vecteurs et sont ainsi colinéaires si

Cette dernière relation s’écrit aussi : , mais aussi :

Pour statuer plus simplement sur la colinéarité de 2 vecteurs, on a inventé une nouvelle entité que l’on appelle DETERMINANT. Le déterminant de 2 vecteurs et est le nombre . On obtient ainsi la propriété suivante, ***partiellement*** démontrée ci-dessus :

Définition : Soit 2 vecteurs et . Le nombre est appelé

 des vecteurs

il est noté

Propriété : Deux vecteurs et sont **colinéaires** si et seulement si

oté

# **Alignement de 3 points :**

Propriété : 3 points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs et sont colinéaires :

# **Equation cartésienne d’une droite :**

Définition : On appelle **vecteur directeur** d’une droite , tout vecteur où et sont deux points distincts de .

Exemple : Soit la droite passant par les points et . Soit un point du plan. Quelle relation doit-il exister entre et pour que le point appartienne à  ?

⇨ Condition pour que le point appartienne à  :

⇨ Coordonnées des vecteurs  et :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

⇨ Calcul du déterminant :

⇨ Condition pour que les vecteurs  et soient COLINEAIRES :

⇨ CONCLUSION : le point appartient à  si les coordonnées , vérifient la relation suivante :

⇨ Peut-on simplifier cette équation ? :

 APPLICATION : Les points suivants appartiennent-ils à la droite  d’équation ?

|  |  |
| --- | --- |
| Le point appartient-il à  ? | Le point appartient-il à  ? |
|   |   |

|  |  |
| --- | --- |
| Le point appartient-il à  ? | Le point *F* appartient-il à  ? |
|   |   |

Définition : Dans un repère du plan, toute droite admet une équation de la forme avec .

Un point du plan appartient à cette droite si et seulement si ses coordonnées vérifient cette équation. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite .

Propriété : Si une droite a une équation cartésienne avec alors le vecteur est un vecteur directeur de .

|  |
| --- |
| Technique 1 : On définit 2 points particuliers |
| On cherche par exemple les coordonnées d’un point de la droite qui a comme abscisse On cherche en plus, par exemple les coordonnées d’un point de la droite qui a comme ordonnée  : |

Exercice : Tracer dans un repère du plan, la droite d’équation .

|  |
| --- |
| Technique 2 : On définit 1 seul point particulier et un vecteur directeur |
|  |