

Chapitre 10. Colinéarité des vecteurs

1- COLINEARITE DE VECTEURS :

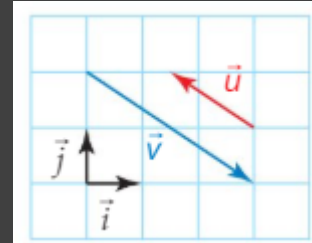
Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

EXEMPLES

• $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{v}$, ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.

On dit que -2 est le coefficient de colinéarité de $\vec{v}$ par rapport à $\vec{u}$.

• $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$.



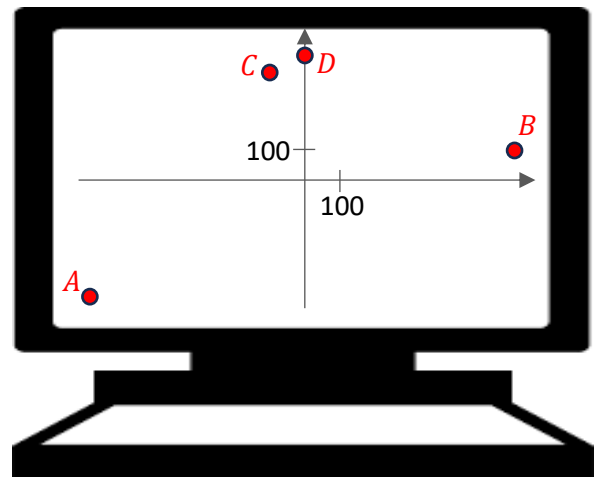
Propriété : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **colinéaires** si et seulement si, ils ont la même direction.

2- APPLICATION : DEMONTRER UN PARALLELISME EN UTILISANT LES COORDONNEES

Un écran de 1400 px de large et 800 px de hauteur, est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont l'origine O se trouve en son centre. L'unité graphique est le pixel.

Dans un contexte de jeu vidéo, les points A, B, C et D de coordonnées $A(-600; -400)$, $B(600; 104)$, $C(-100; 300)$ et $D(0; 342)$ sont affichés sur l'écran. Pour que ce jeu vidéo fonctionne correctement, il est nécessaire de savoir si les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles.

Pour répondre à cette question, on calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. On s'intéressera ensuite à la colinéarité de ces vecteurs.



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} =$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} =$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ? Existe-t-il un nombre k qui permettent de dire que $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{CD}$?

Si ce nombre existe, on doit avoir :

Et ce nombre devrait vérifier ces 2 relations :

Ce qui donnerait pour k :

Finalement $k = 12$ est solution des 2 équations. On peut donc écrire que $\overrightarrow{AB} = 12 \overrightarrow{CD}$.

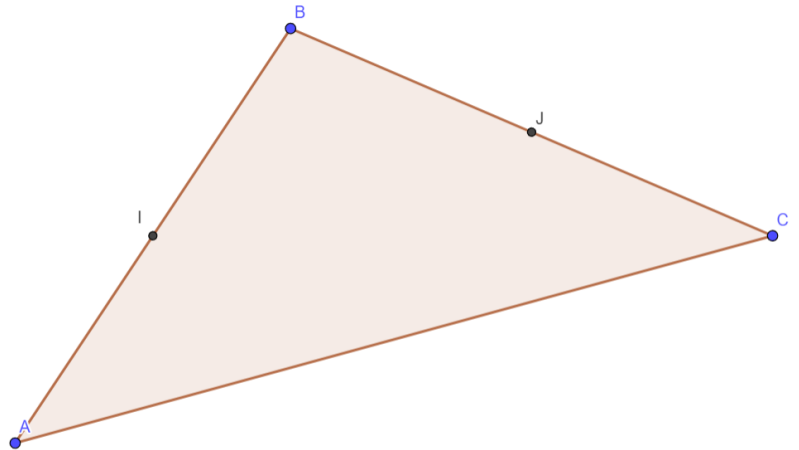
En conclusion, on peut dire que :

- Les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles.
- Le segment $[AB]$ est 12 fois plus grand que $[CD]$.

3- APPLICATION : DEMONSTRER UN PARALLELISME SANS COORDONNEES

Soit un triangle ACB quelconque, donné ci-contre. I est le milieu du côté $[AB]$, J est le milieu de $[BC]$.

Peut-on démontrer vectoriellement que le segment $[IJ]$ est toujours parallèle au côté $[AC]$?



Pour répondre à cette question, on

s'intéresse à la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IJ}$. Contrairement à ce qui a été fait dans le paragraphe précédent, on se propose ici, de ne pas utiliser les coordonnées pour démontrer qu'il existe un nombre k qui permettent de dire que $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{IJ}$

⇒ On exploite tout d'abord le fait que I et J sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$. Vectoriellement, cela se traduit par les relations vectorielles :

⇒ On écrit une relation de Chasles sur le vecteur $\overrightarrow{AC}$ afin de faire apparaître le vecteur $\overrightarrow{IJ}$:

En conclusion, on a pu établir que $\overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{IJ}$. Ainsi quel que soit la taille du triangle, on aura toujours :

- Les segments $[AC]$ et $[IJ]$ qui seront parallèles.
- Le segment $[IJ]$ sera toujours 2 fois plus petit que $[AC]$.

Propriété : Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



4- DETERMINANT DE 2 VECTEURS

Soit 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Ces 2 vecteurs sont colinéaires, s'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$.

Ce qui donne avec les coordonnées : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

On doit donc avoir $x = k x'$ et en même temps $y = k y'$.

Si on suppose que x' et y' sont différents de 0, cela donne $k = \frac{x}{x'}$ et $k = \frac{y}{y'}$.

Les 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ainsi colinéaires si $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$

Cette dernière relation s'écrit aussi : $x y' = y x'$, mais aussi : $x y' - y x' = 0$

Pour statuer plus simplement sur la colinéarité de 2 vecteurs, on a inventé une nouvelle entité que l'on appelle DETERMINANT. Le déterminant de 2 vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est le nombre $x y' - y x'$. On obtient ainsi la propriété suivante, **partiellement** démontrée ci-dessus :

Définition : Soit 2 vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Le nombre $x y' - y x'$ est appelé
 des vecteurs
 il est noté

Propriété : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si



5- ALIGNEMENT DE 3 POINTS :

Propriété : 3 points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :

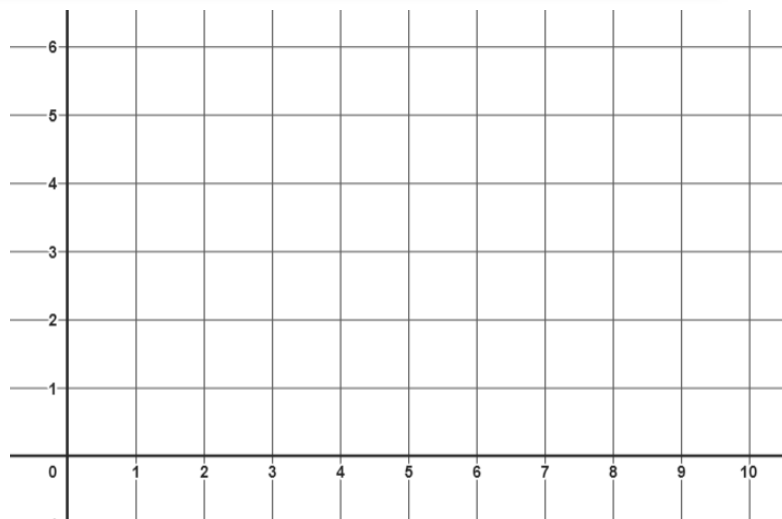


6- EQUATION CARTESIEENNE D'UNE DROITE :

Définition : On appelle **vecteur directeur** d'une droite d , tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de d .

Exemple : Soit la droite d passant par les points $A(1,2)$ et $B(7,4)$. Soit un point $M(x, y)$ du plan. Quelle relation doit-il exister entre x et y pour que le point M appartienne à d ?

⇒ Condition pour que le point M appartienne à d :



⇒ Coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$:



⇒ Calcul du déterminant :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) =$$

⇒ Condition pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient COLINEAIRES :

⇒ CONCLUSION : le point M appartient à d si les coordonnées x, y vérifient la relation suivante :

⇒ Peut-on simplifier cette équation ? :

⇒ APPLICATION : Les points suivants appartiennent-ils à la droite d d'équation $-x + 3y - 5 = 0$?

Le point $C(-0,5 ; 1,5)$ appartient-il à d ?	Le point $D(4,6 ; 3,1)$ appartient-il à d ?
$-x + 3y - 5$ =	$-x + 3y - 5$ =

Le point $E(4 ; 4)$ appartient-il à d ?	Le point $F(16 ; 7)$ appartient-il à d ?
$-x + 3y - 5$ =	$-x + 3y - 5$ =

Définition : Dans un repère du plan, toute droite d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

Un point du plan appartient à cette droite si et seulement si ses coordonnées vérifient cette équation. Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite d .

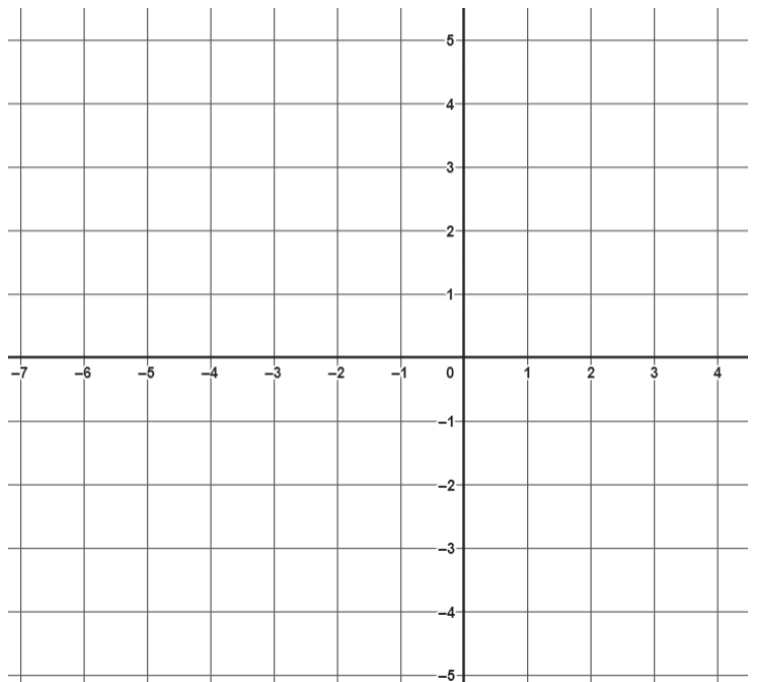
Propriété : Si une droite d a une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ alors le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

Exercice : Tracer dans un repère du plan, la droite d'équation $3x + 2y + 6 = 0$.

Technique 1 : On définit 2 points particuliers

On cherche par exemple les coordonnées d'un point de la droite qui a comme abscisse $x = 0$

On cherche en plus, par exemple les coordonnées d'un point de la droite qui a comme ordonnée $y = 0$:



Technique 2 : On définit 1 seul point particulier et un vecteur directeur