Dm – 2^{nd} 1

EQUATIONS CARTESIENNES DE DROITES

Exercice 1 : Pour chacune des affirmations qui suit, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant à chaque fois :

- Affirmation 1 : La droite d d'équation $2x - y - 4 = 0$ coupe l'axe des abscisses au point $C(2\,;0)$
  $2 \times \mathbf{2} - \mathbf{0} - 4 = 4 - 4 = 0$. Les coordonnées du point C vérifient l'équation de d. Donc $C \in d$.
  L'affirmation 1 est donc vraie.

- Affirmation 2 : La droite d d'équation $-3x - y + 5 = 0$ a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$
  On a une équation du type $ax + by + c = 0$ avec $a = -3$, $b = -1$ et $c = 5$. Le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$,
  $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étant pas colinéaires, le vecteur $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur de d . L'affirmation 2 est donc fausse.

- Affirmation 3 : Le point de coordonnées $M(21\,;193)$ appartient à la droite d d'équation
  $12x - 2y + 133 = 0$
  $12 \times \mathbf{21} - 2 \times \mathbf{193} + 133 = 252 - 386 + 133 = -1 \neq 0$. Les coordonnées du point M ne vérifient pas l'équation de d. Donc $M \notin d$. L'affirmation 3 est donc fausse.

- Affirmation 4 : Les droites d'équation $3x - 2y + 4 = 0$ et $5x + y - 1 = 0$ sont sécantes.
  La droite d'équation $3x - 2y + 4 = 0$ est du type $ax + by + c = 0$ avec $a = 3$ et $b = -2$. Elle a comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. De même, la droite d'équation $5x + y - 1 = 0$ a comme vecteur directeur le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.
  On a $\det(\vec{u}\,,\vec{v}) = \det\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}\right) = 2 \times 5 - 3 \times (-1) = 10 + 3 = 13 \neq 0$
  Les vecteurs $\vec{u}\,,\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires. Les droites ne sont donc pas parallèles et sont ainsi sécantes. L'affirmation 4 est donc vraie.

- Affirmation 5 : Les droites d : $y = -3x + 1$ et d' : $y = -3 + 2x$ sont parallèles.
  Le coefficient directeur de la droite d'équation $y = -3x + 1$ est (-3). Celui de la droite d'équation $y = 2x - 3$ est égal à 2.
  Ces 2 coefficients directeurs sont différents. Les droites ne sont donc pas parallèles et sont ainsi sécantes.
  L'affirmation 5 est donc fausse.

- Affirmation 6 : La droite d'équation $-x + 4y + 5 = 0$ coupe la droite d'équation $y = 1$ au point $R(-9\,;1)$
  $-(\mathbf{-9}) + 4 \times \mathbf{1} + 5 = 9 + 4 + 5 = 18 \neq 0$. Les coordonnées du point R ne vérifient pas l'équation de la droite. Le point R n'appartient donc pas à cette droite. L'affirmation 6 est donc fausse.

Exercice 2 : Les questions suivantes sont indépendantes :

- Question 1 : Citer trois vecteurs directeurs de la droite d'équation $-3x + \frac{1}{2}y + 2 = 0$
  La droite d'équation $-3x + \frac{1}{2}y + 2 = 0$ est du type $ax + by + c = 0$ avec $a = -3$ et $b = \frac{1}{2}$. Elle a comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-3\end{pmatrix}$. On peut donner 2 autres vecteurs colinéaires à $\vec{u}$, ils sont également des vecteurs directeurs de cette droite : $2\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-6\end{pmatrix}$ ou $-2\vec{u}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$

- <u>Question 2</u> : Déterminer une équation cartésienne de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ et passant par le point $B(1\,;2)$.
  $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite. La droite d'équation $ax+by+c=0$ avec $a=-1$ et $b=-4$ a comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$.
  L'équation est cette droite est donc $-1\,x-4y+c=0$
  Elle passe par le point $B(1\,;2)$, si ses coordonnées vérifient l'équation, donc si :
$$-1\ \times 1\ -4\times 2\ +c=0$$
$$-1-8+c=0$$
$$-9+c=0$$
$$c=9$$
  Une équation cartésienne recherchée est donc $-x-4y+9=0$

- <u>Question 3</u> : Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) avec $A(-3\,;5)$ et $B(4\,;0)$
  Un point $M(x,y)\in d$ si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-3)\\y-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-3)\\0-5\end{pmatrix}$ sont colinéaires. Ce point appartient à d si $\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=\det\left(\begin{pmatrix}x+3\\y-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\-5\end{pmatrix}\right)=-5(x+3)-7(y-5)=0$
  Cela donne : $-5x-15-7y+35=0$
  Après simplification : $-5x-7y+20=0$

- <u>Question 4</u> : Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à d : $-1{,}5\,x+2y+1=0$ et passant par le point $D(6\,;2)$
  L'équation de la droite recherchée a comme équation cartésienne $ax+by+c=0$. Elle a le même vecteur directeur que d. Les valeurs de a et b peuvent donc être identiques. Une équation peut donc être : $-1{,}5\,x+2\,y+c=0$
  Les coordonnées de D doivent vérifier cette équation, ce qui donne : $-1{,}5\ \times 6+2\ \times 2+c=0$
$$-9+4+c=0$$
$$c=5$$
  Une équation cartésienne de la droite peut donc être $-1{,}5\,x+2\,y+5=0$

<u>Exercice 3 :</u> On considère la droite d d'équation $2x-y+1=0$

1- Démontrer que le point $T(-1;-1)$ appartient à d. Tracer la droite d.
   $2\times(\mathbf{-1})-(\mathbf{-1})+1\ =\ -2+1+1\ =-2+2\ =0$. Les coordonnées du point T vérifient l'équation de la droite. Le point T appartient donc à cette droite.

2- Soit $P(3\,;1)$ et $R(-1\,;\,-7)$. Les droites (PR) et d sont-elles parallèles ?
   La droite d'équation $2x-y+1=0$ est du type $ax+by+c=0$ avec $a=2$ et $b=-1$. Elle a comme vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
   Le vecteur $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-1-3\\-7-1\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}$, est un vecteur directeur de la droite (PR).
   On constate de suite que $\overrightarrow{PR}=-4\,\vec{u}$ et donc que la droite d et la droite (PR) ont des vecteurs directeurs colinéaires. On peut donc affirmer que ces 2 droites sont parallèles.

3- Déterminer le point d'intersection S de d et de la droite d' ayant pour équation $x=3$.
   On cherche l'ordonnée y d'un point de d dont l'abscisse x est $x=3$. Ces coordonnées vérifient l'équation
$$2x-y+1=0$$
$$2\times 3-y+1=0$$
$$6-y+1=0$$
$$7-y=0$$
$$y=7$$
   Les coordonnées du point S sont donc $S(3\,;7)$

4- Quelle est la nature du quadrilatère $STRP$?

On a calculé $\overrightarrow{PR}\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}$.

On a $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}x_T - x_S\\y_T - y_S\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-1-3\\-1-7\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{ST}\begin{pmatrix}-4\\-8\end{pmatrix}$

On constate que $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{ST}$

Le quadrilatère $STRP$ est donc un parallélogramme.