

24 Une vision vectorielle d'un théorème connu

Soit $A(2 ; 1)$, $B(3 ; 3)$, $C(5 ; 2)$

1. Faire une figure et placer les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$

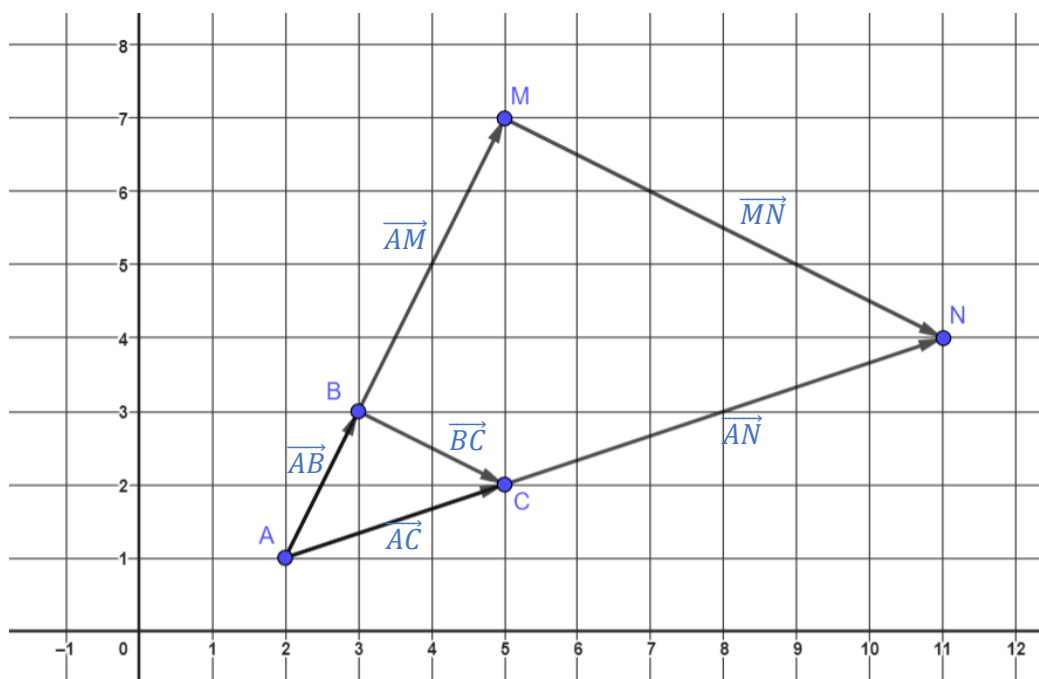
2. Calculer les coordonnées des points M et N.

3. a. Montrer que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

b. Interpréter géométriquement cette relation.

c. Quel théorème bien connu retrouve-t-on ainsi ?

1- Figure :



2-

Coordonnées du point M	Coordonnées du point N
On cherche les coordonnées $M(x, y)$ du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$. On calcule les coordonnées de ces deux vecteurs :	On cherche les coordonnées $N(x, y)$ du point N tel que $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$. On calcule les coordonnées de ces deux vecteurs :
$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 3 - 1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 2 - 1 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
On a donc $3\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \times 3 \\ 2 \times 3 \end{pmatrix}$, soit $3\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$	On a donc $3\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \times 3 \\ 1 \times 3 \end{pmatrix}$, soit $3\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1 \end{pmatrix}$
Pour avoir l'égalité $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$, on doit avoir $x - 2 = 3, \text{ soit } x = 5$ $y - 1 = 6, \text{ soit } y = 7$	Pour avoir l'égalité $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AC}$, on doit avoir $x - 2 = 9, \text{ soit } x = 11$ $y - 1 = 3, \text{ soit } y = 4$
Les coordonnées du point M sont donc $M(5, 7)$	Les coordonnées du point N sont donc $N(11, 4)$

3-

- a. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MN}$:

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 5 - 3 \\ 2 - 3 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 11 - 5 \\ 4 - 7 \end{pmatrix}, \text{ donc } \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On voit de suite que $\overrightarrow{MN} = 3 \overrightarrow{BC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont donc colinéaires.

On aurait pu arriver à cette conclusion en calculant un déterminant :

$$\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}) = \det \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 2 \times (-3) - (-1) \times 6 = (-6) - (-6) = -6 + 6 = 0$$

Ce déterminant étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont donc bien colinéaires.

- b. Géométriquement, on peut en conclure que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
c. On retrouve ici le théorème de Thalès :

Dans le triangle AMN ci-contre, la relation vectorielle $\overrightarrow{MN} = 3 \overrightarrow{BC}$ entraîne la relation suivante sur les longueurs :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut affirmer que les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

