Exercice 1. : *(7 points)*

Les questions de cet exercice sont indépendantes. **Aucune figure n'est demandée**.

1- Déterminer le(s) nombres x tesl(s) que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -9 \\ x \end{pmatrix}$ soient colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -9 \\ x \end{pmatrix}$ sont colinéaires si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, c'est-à-dire si :

$$\det\left(\begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ x \end{pmatrix}\right) = 0$$
$$x^2 - (-4) \times (-9) = 0$$
$$x^2 - 36 = 0$$
$$x^2 - 6^2 = 0$$
$$(x-6)(x+6) = 0$$

Donc si $x = 6$ ou $x = -6$

On peut vérifier ces résultats :

Si $x = 6$ on obtient $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ On remarque que $\vec{v} = -1{,}5\,\vec{u}$ Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont bien colinéaires	Si $x = -6$ on obtient $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -9 \\ -6 \end{pmatrix}$ On remarque que $\vec{v} = 1{,}5\,\vec{u}$ Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ sont bien colinéaires

2- Les phrases suivantes sont incomplètes. Les écrire complétée sur votre feuille de copie :

a. Si un nombre x est tel que $-2 < x < 5$, alors $\ldots < x^3 < \cdots$.. car .....

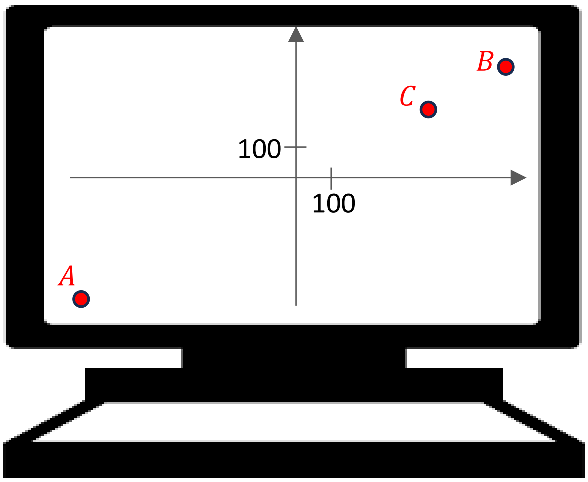
Si un nombre x est tel que $-2 < x < 5$, alors $(-2)^3 < x^3 < 5^3$ et $-8 < x^3 < 125$ donc car la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Si le cube d'un nombre x est égal à 0,125 , alors ce nombre x est égal .....

Si le cube d'un nombre x est égal à 0,125 , alors ce nombre x est égal à $x = \sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$

3- Un écran de 1400 px de large et 800 px de hauteur, est muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ dont l'origine O de trouve en son centre. L'unité graphique est le pixel.

Dans un contexte de jeu vidéo, les points A, B et C de coordonnées $A(-600\,;\,-400)$, $B(600\,;320)$ et $C(400\,;\,210)$ sont affichés sur l'écran. Pour que ce jeu vidéo fonctionne correctement, il est nécessaire de savoir si ces points sont alignés ?



⇨ Réaliser les calculs nécessaires qui vous permettront de répondre à cette question. **Aucune figure n'est demandée**.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 600-(-600) \\ 320-(-400) \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1200 \\ 720 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 400-(-600) \\ 210-(-400) \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1000 \\ 610 \end{pmatrix}$$

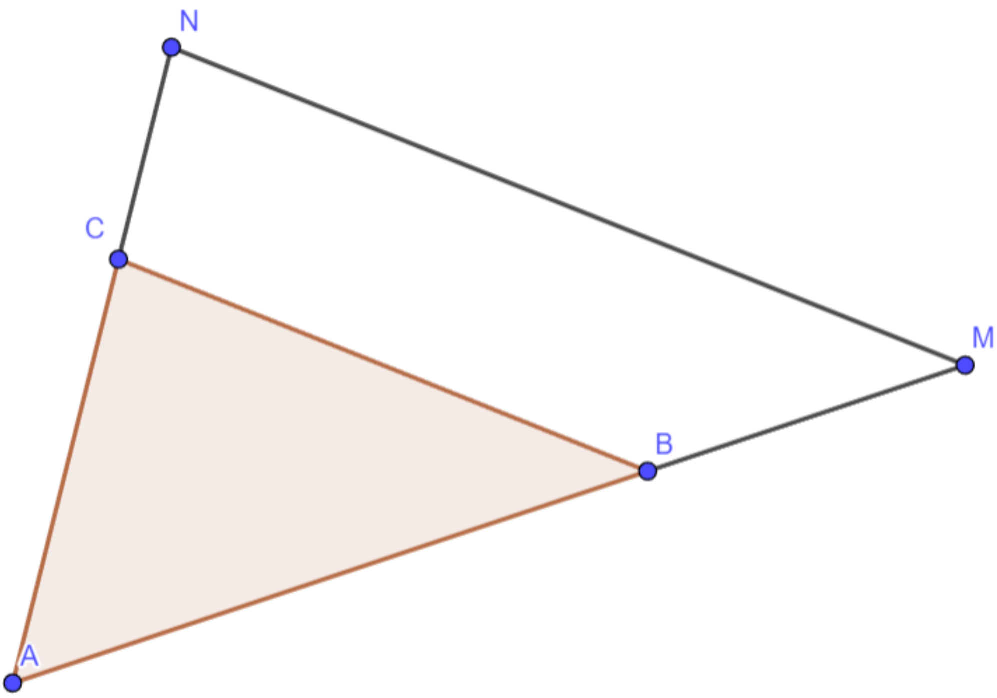
On a : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det\left(\begin{pmatrix}1200\\720\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1000\\610\end{pmatrix}\right) = 1200 \times 610 - 720 \times 1000 = 12000$

Comme ce déterminant n'est pas nul, on peut dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, et donc que les points A, B et C ne sont pas alignés.

Exercice 2. : *(4 points)*

Tracer un triangle ABC quelconque.

1- Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 1{,}5\,\overrightarrow{AB}$ et le point N tel que $\overrightarrow{AN} = 1{,}5\,\overrightarrow{AC}$



2- On veut montrer que les droites (MN) et (BC) sont toujours parallèles :

a. Ecrire la relation de Chasles donnant $\overrightarrow{MN}$ en passant par le point A

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

b. Y introduire les relations vectorielles définissant la position des points M et N

Comme $\overrightarrow{AM} = 1{,}5\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 1{,}5\,\overrightarrow{AC}$, la relation précédente devient :

$$\overrightarrow{MN} = 1{,}5\,\overrightarrow{BA} + 1{,}5\,\overrightarrow{AC}$$

c. Conclure en exprimant le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BC}$

On a :

$$\overrightarrow{MN} = 1{,}5\,\overrightarrow{BA} + 1{,}5\,\overrightarrow{AC} = 1{,}5\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = 1{,}5\,\overrightarrow{BC}$$

3- Conclure par rapport au parallélisme des droites (MN) et (BC)

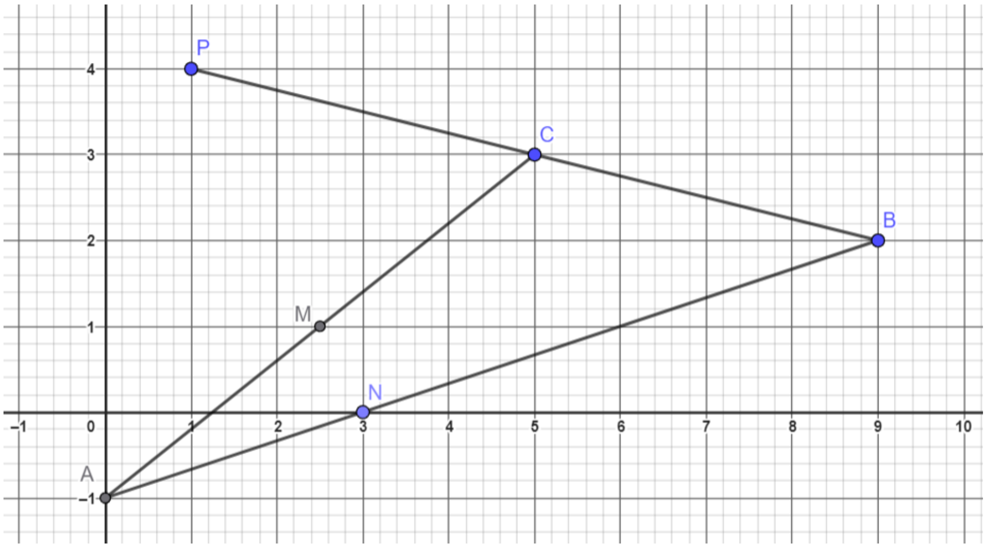
Comme $\overrightarrow{MN} = 1{,}5\,\overrightarrow{BC}$, ces deux vecteurs sont colinéaires et ainsi les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Problème : *(9 points)*

Soit $A(0\,;\,-1)$, $B(9\,;\,2)$ et $C(5\,;\,3)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé. Le point M est le milieu $[AC]$.
Les points N et P sont tels que $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BP} = 2\,\overrightarrow{BC}$.

Comme M est le milieu $[AC]$, on a $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1- Faire une figure et placer les points A, B, C, M, N, P .



2- Calculer les coordonnées du point M.

Le point M est le milieu du segment $[AC]$. On a donc :

$$M\left(\frac{x_A+x_C}{2}\ ;\ \frac{y_A+y_C}{2}\right) \quad \text{donc} \quad M\left(\frac{0+5}{2}\ ;\ \frac{-1+3}{2}\right) \quad \text{donc} \quad M(2{,}5\ ;\ 1)$$

3- Le point P est défini par la relation $\overrightarrow{BP} = 2\,\overrightarrow{BC}$. On suppose que ses coordonnées sont $P(x, y)$. Utiliser la relation $\overrightarrow{BP} = 2\,\overrightarrow{BC}$ pour déterminer par calcul les valeurs de x et y.

Pour trouver les coordonnées $P(x, y)$ du point P, on utilise la relation $\overrightarrow{BP} = 2\,\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BP}\begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{BP}\begin{pmatrix} x - 9 \\ y - 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 5 - 9 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$2\,\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \times 2 \\ 1 \times 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad 2\,\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Comme $\overrightarrow{BP} = 2\,\overrightarrow{BC}$, on doit avoir $x - 9 = -8$ et $y - 2 = 2$

Ce qui donne $x = 1$ et $y = 4$

Les coordonnées du point P sont donc : $P(1\,;4)$

4- On admet que les coordonnées du point N sont $N(3\,;0)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$

$$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 3 - 2{,}5 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} x_P - x_M \\ y_P - y_M \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} 1 - 2{,}5 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{MP}\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5- En déduire que les points M , N et P sont alignés.

On remarque que $\overrightarrow{MP} = -3\ \overrightarrow{MN}$. Les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont donc colinéaires et ainsi les points M , N et P sont alignés.

6- Question plus difficile : En utilisant la relation de Chasles et les relations vectorielles de l'énoncé :

a. Ecrire $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

Comme $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, on peut dire que :

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

b. Ecrire $\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Avec la relation de Chasles : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$

Comme $\overrightarrow{BP} = 2\,\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, on peut dire que :

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BC}$$

Avec la relation de Chasles $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

La relation précédente devient :

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AB} + \frac{4}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

c. Conclure

On remarque que :

$$-3\,\overrightarrow{MN} = -3\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MP}$$

On a ainsi montré que $\overrightarrow{MP} = -3\ \overrightarrow{MN}$. Les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont donc colinéaires et ainsi les points M , N et P sont alignés.